



André Filipe Amaral Teixeira

Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica

Otimização de topologia de treliças considerando incerteza

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso, Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade Nova de Lisboa



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro, 2017

Copyright

Otimização de topologia de treliças considerando incerteza

Copyright © André Filipe Amaral Teixeira, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Em memória da minha querida avó,

Maria Etelvira Martins Teixeira

Agradecimentos

Queria começar por agradecer ao meu orientador, Professor Doutor João Cardoso, pela proposta que me fez para realizar este trabalho e por toda a disponibilidade que teve para comigo e o empenho que demonstrou em ajudar-me, assim como todos os conhecimentos transmitidos.

À Faculdade de Ciências e Tecnologia, em especial ao Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial (DEMI) e o seu corpo docente, pelas condições de aprendizagem que proporcionaram durante o percurso académico assim como na realização desta dissertação.

Queria agradecer a todas as pessoas com quem me cruzei neste percurso académico, que de uma maneira ou outra tornaram esta viagem única, à Geração 10 e em especial à Geração 09, fiéis companheiros nestes anos de esforço e trabalho, tornaram tudo mais fácil com o espírito de entreajuda que se viveu.

Queria deixar uma palavra ao meu amigo e colega de curso Pedro Guerreiro, o fiel companheiro da 158, por teres sido aquele grande amigo desde o primeiro dia que nos conhecemos, e por todos os momentos que vivemos.

Ao meu grande amigo de longa data Tiago Tavares, que se veio a tornar colega de curso, obrigado por toda a amizade e apoio, por seres aquele amigo que está sempre lá quando é preciso.

Queria agradecer a minha Mãe, Fernanda Amaral, por ser o grande suporte na minha vida em todos os bons e maus momentos vividos até hoje, dedico-lhe este trabalho por saber o que também significa para ela.

Ao meu Irmão, Filipe Teixeira, por toda a ajuda e o apoio que me deu desde sempre.

Por fim queria agradecer à minha namorada, Raquel Franco por me motivar a ser uma pessoa melhor todos os dias, nunca ter desistido de acreditar em mim nos momentos difíceis e pelo seu apoio inquantificável para concluir esta etapa.

Resumo

A presente dissertação tem como o principal objetivo o desenvolvimento de uma metodologia para otimização robusta de topologia considerando a incerteza em parâmetros de projeto.

A otimização de topologia permite que seja adicionado ou removido material dentro de um domínio de projeto, o que significa que a ligação entre elementos e a distribuição do material são otimizadas ao mesmo tempo. Isto leva a que seja possível obter novas estruturas com alto desempenho.

No entanto, as estruturas obtidas via otimização determinística podem ser subótimas, visto que não consideram as variações nas condições de funcionamento ou fabrico, isto pode levar a incerteza em parâmetros como a geometria da estrutura ou as características do material.

Para abordar este assunto, surge o conceito de otimização robusta, que procura minimizar os efeitos da variabilidade e obter soluções com alto grau de robustez.

É então proposta uma formulação de um problema de otimização robusta considerando incerteza no módulo de elasticidade, e a sua resolução recorrendo às capacidades de otimização do MATLAB em conjunto com a utilização do programa PROAES.

Selecionou-se um caso de estudo presente na bibliografia para testar a metodologia proposta para resolução de problemas de otimização robusta de topologia de treliças. Os resultados obtidos indicam um bom funcionamento e validam o uso da metodologia proposta.

Palavras Chave: Otimização de topologia de treliças, Incerteza, Otimização Robusta de Topologia

Abstract

The main objective of this dissertation is the development of a methodology for robust topology optimization for truss structures with material uncertainty.

Topology optimization allows material to be added or removed within a design domain, which means that the structural connectivity between elements and the material distribution are optimized at the same time. This leads to new high-performance structures being obtained.

However, structures obtained through optimization in a deterministic setting can be suboptimal, since they do not consider variations in the operating or manufacturing conditions, this can lead to uncertainty in parameters such as structure geometry or material properties.

To address this issue, the robust optimization concept emerges, which seeks to minimize the effects of variability and to obtain solutions with a high degree of robustness.

It is then proposed a formulation for a robust optimization problem considering the uncertainty in the Young's modulus, and its resolution using MATLAB and its optimtool toolbox in conjunction with the use of the PROAES program.

It is selected a case study from the literature to test the proposed methodology for solving robust topology optimization problems of truss structures. The results obtained are in agreement with those obtained in the literature and validate the use of the proposed methodology.

Keywords: Robust Topology Optimization, Truss Topology Optimization, Uncertainty

Índice

AGRADECIMENTOS.....	I
RESUMO	III
ABSTRACT	V
ÍNDICE.....	VII
ÍNDICE DE FIGURAS	IX
ÍNDICE DE TABELAS	XI
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO.....	3
1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	3
2. OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DE TOPOLOGIA	5
2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	5
2.1.1 <i>Formulação de um problema de otimização.....</i>	<i>7</i>
2.1.2 <i>Otimização dimensional.....</i>	<i>8</i>
2.1.3 <i>Otimização de forma</i>	<i>8</i>
2.1.4 <i>Otimização de topologia</i>	<i>9</i>
2.2 OTIMIZAÇÃO CONSIDERANDO INCERTEZA	11
2.2.1 <i>Otimização baseada em fiabilidade – RBDO.....</i>	<i>11</i>
2.2.1.1 <i>Fiabilidade</i>	<i>12</i>
2.2.1.2 <i>Função de estado limite</i>	<i>12</i>
2.2.1.3 <i>Formulação de um problema de RBDO</i>	<i>14</i>
2.2.2 <i>Otimização Robusta - RDO.....</i>	<i>15</i>
2.2.2.1 <i>Taguchi</i>	<i>16</i>
2.2.2.2 <i>Revisão de literatura.....</i>	<i>18</i>

2.2.2.3 Formulação de um problema de otimização robusta - RDO	20
2.2.3 Comparação entre RBDO e RDO.....	21
3. UTILIZAÇÃO DO PROAES EM OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA.....	23
3.1 INTRODUÇÃO.....	23
3.2 FUNCIONAMENTO DO PROGRAMA.....	24
3.2.1 <i>Análise de sensibilidades pelo método contínuo</i>	27
3.2.2 <i>Análise de fiabilidade</i>	27
3.2.3 <i>Otimização estrutural</i>	28
3.3 EXEMPLO DE APLICAÇÃO	30
4. METODOLOGIA E CASO DE ESTUDO	35
4.1 EXEMPLO – TRELIÇA 38 BARRAS	35
4.1.1 <i>Formulação do problema</i>	36
5 RESULTADOS.....	41
5.1 PROGRAMA DE PÓS PROCESSAMENTO - “POSTOPTPLOT”	41
5.2 RESULTADOS	42
5.2.1 <i>Variabilidade = 10%</i>	42
5.2.2 <i>Variabilidade = 20%</i>	48
5.2.3 <i>Variabilidade = 30%</i>	50
5.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	52
6. CONCLUSÕES	57
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59

Índice de Figuras

FIGURA 1 - PROCESSO ITERATIVO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL, ADAPTADO DE [12]	6
FIGURA 2 - EXEMPLO DE OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL, ADAPTADO DE [14]	8
FIGURA 3 - PROCESSOS DE OTIMIZAÇÃO DE FORMA, ADAPTADO DE [12] [13].....	9
FIGURA 4 - EXEMPLO DE OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA NUM MEIO CONTÍNUO COM PRÉ DEFINIÇÃO DE MATERIAL, ADAPTADO DE [14].....	9
FIGURA 5 - EXEMPLO DE OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA NUM MEIO CONTÍNUO, ADAPTADO DE [9]	10
FIGURA 6 - A) EXEMPLO DE UMA GROUND STRUCTURE, B) EXEMPLO DE UMA OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA	10
FIGURA 7 – FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DO ESTADO LIMITE G	13
FIGURA 8 – OTIMIZAÇÃO ROBUSTA VERSUS OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA, ADAPTADO DE [30]	16
FIGURA 9 – COMPARAÇÃO ENTRE ROBUSTEZ E FIABILIDADE ESTRUTURAL.....	21
FIGURA 10 - OS DIFERENTES CENÁRIOS ABORDADOS EM RBDO E RBO, ADAPTADO DE [41]	22
FIGURA 11 - ESTRUTURA DO PROGRAMA PROAES, ADAPTADO DE [43]	26
FIGURA 12 - INTERLIGAÇÃO ENTRE OS PROGRAMAS PROAES E PROAES_FORM, ADAPTADO DE [44]	28
FIGURA 13 - INTERLIGAÇÃO ENTRE O PROGRAMA PROAES E O OPTIMTOOL, ADAPTADO DE [44]	29
FIGURA 14 - TRELIÇA 38 BARRAS - EXEMPLO DETERMINÍSTICO – CONFIGURAÇÃO INICIAL	30
FIGURA 15 - TRELIÇA 38 APÓS O PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA	33
FIGURA 16 - TRELIÇA 38 BARRAS	36
FIGURA 17 - ESQUEMATIZAÇÃO DO PROGRAMA POSTOPTPLOT	42
FIGURA 18 - RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DA TRELIÇA PARA UM VALOR DE $A = 1$	43
FIGURA 19 - RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DA TRELIÇA PARA UM VALOR DE $A = 0$	44
FIGURA 20 - RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DA TRELIÇA PARA UM VALOR DE $A = 0.1$	44
FIGURA 21 - RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DA TRELIÇA PARA UM VALOR DE $A = 0.2$	45
FIGURA 22 - RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DA TRELIÇA PARA UM VALOR DE $A = 0.3$	45
FIGURA 23 - RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DA TRELIÇA PARA UM VALOR DE $A = 0.4$	46
FIGURA 24 - RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO DA TRELIÇA PARA UM VALOR DE $A = 0.5$	46
FIGURA 25 - VALORES NORMALIZADOS DO VALOR ESPERADO E DESVIO PADRÃO DA COMPLIANCE PARA DIFERENTES VALORES DE α COM 10% DE VARIABILIDADE NO MÓDULO DE YOUNG	47

FIGURA 26 - RESULTADOS OBTIDOS COM 20% DE VARIABILIDADE NO MÓDULO DE YOUNG PARA VÁRIOS VALORES DO COEFICIENTE DE PESO α	48
FIGURA 27 - VALORES NORMALIZADOS DO VALOR ESPERADO E DESVIO PADRÃO DA COMPLIANCE PARA DIFERENTES VALORES DE α COM 20% DE VARIABILIDADE NO MÓDULO DE YOUNG.....	49
FIGURA 28 - RESULTADOS OBTIDOS COM 30% DE VARIABILIDADE NO MÓDULO DE YOUNG PARA VÁRIOS VALORES DO COEFICIENTE DE PESO α	50
FIGURA 29 - VALORES NORMALIZADOS DO VALOR ESPERADO E DESVIO PADRÃO DA COMPLIANCE PARA DIFERENTES VALORES DE α COM 30% DE VARIABILIDADE NO MÓDULO DE YOUNG.....	51
FIGURA 30 - RESULTADOS OBTIDOS PARA DIFERENTES VALORES DE VARIABILIDADE DO MÓDULO DE YOUNG	55
FIGURA 31 - RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO DO EXEMPLO PARA 10% DE VARIABILIDADE NO MÓDULO DE YOUNG E DIFERENTES VALORES DE A, A COLUNA DA ESQUERDA REPRESENTA OS RESULTADOS OBTIDOS NESTE TRABALHO, E A COLUNA DA DIREITA OS RESULTADOS OBTIDOS POR ASADPOURE ET AL. [11].....	56

Índice de Tabelas

TABELA 1 - EXEMPLOS DE FUNÇÃO OBJETIVO, VARIÁVEIS DE PROJETO E CONSTRANGIMENTOS UTILIZADOS EM OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL, ADAPTADO DE [6]	7
TABELA 2 - COMPARAÇÃO ENTRE RBO E RBDO.....	22
TABELA 3 - TIPO DE DADOS EXISTENTES NUM FICHEIRO 'PROBLEMA'.INP	24
TABELA 4 - PERFORMANCES E VARIÁVEIS DE PROJETO DISPONÍVEIS NO PROAES	27
TABELA 5 - GAMAS DE VALORES UTILIZADOS NA REPRESENTAÇÃO DA ESTRUTURA ÓTIMA PARA O EXEMPLO DETERMINÍSTICO	33
TABELA 6 - VALORES DAS ÁREAS OBTIDAS PARA O EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO PROAES DA SECÇÃO 3.3, RELAÇÃO ENTRE A ÁREA FINAL E INICIAL, E RELAÇÃO ENTRE A ÁREA FINAL DE CADA ELEMENTO EM RELAÇÃO A ÁREA MÁXIMA	34
TABELA 7 - PERFORMANCES DO EXEMPLO TRELIÇA 38 BARRAS	37
TABELA 8 - GAMAS DE VALORES UTILIZADOS NA REPRESENTAÇÃO DA ESTRUTURA ÓTIMA	42
TABELA 9 - VALORES DE VOLUME DE CADA BARRA DA ESTRUTURA DO EXEMPLO DA SECÇÃO 4.1 PARA DIFERENTES VALORES DE VARIABILIDADE DO MÓDULO DE YOUNG E DO COEFICIENTE DE PESO (0, 0.1 E 0.2)	53
TABELA 10 - VALORES DE VOLUME DE CADA BARRA DA ESTRUTURA DO EXEMPLO DA SECÇÃO 4.1 PARA DIFERENTES VALORES DE VARIABILIDADE DO MÓDULO DE YOUNG E DO COEFICIENTE DE PESO (0.3, 0.4 E 0.5)	54

1. Introdução

A Engenharia e todas as suas áreas de interesse e aplicação têm sido uma das grandes ferramentas do ser humano para que este continue a quebrar cada vez mais barreiras na evolução da tecnologia inerente a melhorar a qualidade de vida no mundo.

Todos os produtos ou estruturas existentes passam por uma fase de projeto e concepção, em que há uma constante análise de acordo com o propósito que virão a ter e as funções a desempenhar. Para satisfazer estes requisitos e cumprir com os objetivos pré-definidos, ao mesmo tempo que se pretende fabricar produtos de elevada qualidade com o menor custo possível, é necessário recorrer a técnicas que permitam escolher os parâmetros que definem o melhor projeto de acordo com os objetivos e restrições, este processo é conhecido como otimização.

A otimização estrutural abrange um conjunto de metodologias e teorias que tem como finalidade a procura de uma solução ótima com a distribuição de material (ou elementos) de uma estrutura para o desempenho de uma determinada função.

Os primeiros trabalhos analíticos sobre otimização estrutural foram da autoria de Maxwell [1] e Michell [2], mas apenas décadas mais tarde houve desenvolvimentos significativos em diversas áreas, que permitiram o avanço para a otimização estrutural moderna, tais como: o aparecimento do computador digital no início da década de 50, os métodos de programação matemática e os métodos numéricos de análise de estruturas como o MEF – Método dos Elementos Finitos, uma descoberta que é muitas vezes atribuída a Courant [3], enquanto que Clough [4] foi quem o denominou.

Todos estes desenvolvimentos nos anos 50 faziam prever um grande potencial para a otimização estrutural. Schmit [5] foi o autor do trabalho que é considerado como o verdadeiro início da otimização estrutural moderna, este teve uma grande importância e valor na época por dois motivos: a combinação dos métodos de análise de estruturas por elementos finitos (MEF)

com os métodos numéricos de otimização e ter demonstrado a viabilidade deste processo na resolução de problemas reais.

Desde então e até os tempos de hoje, a otimização estrutural moderna tem sido marcada por diversos avanços e descobertas ao nível de teorias de otimização, dos métodos numéricos e também do *hardware* e *software*, que permitem resolver problemas com estruturas cada vez mais complexas, com um número elevado de parâmetros de projeto e de constrangimentos [6].

A otimização estrutural clássica tende a obter soluções que são excelentes se as condições iniciais se mantiverem constantes, dado que os parâmetros utilizados são determinísticos, sejam as cargas ou esforços, áreas ou módulos de elasticidade. O algoritmo utilizado vai fornecer uma solução ideal, mas que é muito sensível a variações nos parâmetros de projeto [7]. Na conceção de um material a ser utilizado na estrutura, se o valor do seu módulo de elasticidade se afastar do definido em projeto, ou se na montagem de dois elementos estes ficarem ligeiramente desalinhados, a estrutura otimizada poderá ter uma maior tendência para colapsar [8].

Todas estas incertezas têm um papel muito importante dado que a sua incorporação na fase de projeto permite uma aproximação maior à realidade do funcionamento da estrutura no seu ciclo de vida. A existência de incertezas é normalmente considerada utilizando coeficientes de segurança. Estes apesar de oferecerem uma boa margem de erro, são muito conservadores e originam um sobredimensionamento e não cumprem os requisitos das teorias de otimização, que procuram saber a resposta (sensibilidade) das soluções ótimas às pequenas variações dos parâmetros, a chamada *Robustez* da solução [9].

Para lidar com a incerteza dos parâmetros, existem de uma maneira geral, duas formulações de problemas de otimização estrutural, otimização estrutural baseada na fiabilidade (*Reliability-Based Design Optimization* – RBDO) e a otimização estrutural robusta (*Robust Design Optimization* – RDO) [10]. Existem algumas diferenças nos conceitos de cada uma destas formulações, no caso da RBDO, esta procura sistemas estruturais seguros e otimizados, assumindo a variabilidade dos parâmetros relacionados com as propriedades dos materiais, geometria e variação dos carregamentos. A RBDO está preocupada com a probabilidade de falha (quantificada com um índice de fiabilidade) e otimiza as medidas de desempenho de acordo com um constrangimento desta probabilidade [11]. A RDO foca-se em procurar uma solução que minimize a sensibilidade da resposta em relação às pequenas variações ou incertezas, ou seja, que permita uma maior oscilação dos parâmetros do sistema ou estrutura quando sujeita às condições de funcionamento diário sem comprometer essa resposta [10]. Pode-se dizer que a RDO tem uma maior preocupação com propriedades (características) estatísticas de baixa ordem das incertezas envolvidas (média e desvio padrão), enquanto que a RBDO tem em conta propriedades estatísticas de elevada ordem como os extremos das funções de densidade de uma probabilidade [11].

A otimização robusta tem a sua origem ligada ao nome de Taguchi [12] “o pai da otimização robusta”, [7] pioneiro no desenvolvimento de metodologias que serviram de base para todos os trabalhos que têm surgido desde então sobre esta temática.

Uma das áreas onde têm surgido muitos trabalhos é a otimização robusta de topologia, que apresenta um elevado interesse para esta dissertação, em especial a otimização de topologia de estruturas a partir de uma *ground structure* em que é considerada a incerteza nos parâmetros de projeto. Dentro da literatura existente, realçam-se os trabalhos de Guest e Igusa [8] e Asadpoure et al. [11], o primeiro tem servido de ponto de partida para diversas novas abordagens com RDO que vão ser detalhadas mais a frente.

Assim propõe-se neste trabalho uma nova metodologia para a resolução de problemas de otimização robusta de topologia de treliças. Esta produz excelentes resultados tendo como comparação os de Asadpoure et al.[11], e que tem como vantagem utilizar a capacidade que o programa de elementos finitos PROAES disponibiliza para o cálculo de sensibilidades pelo método contínuo.

1.1 Objetivos da dissertação

Desenvolvimento de uma nova metodologia para otimização robusta de treliças considerando a incerteza nos parâmetros de projeto, como o módulo de elasticidade, as coordenadas dos nós da treliça e a orientação e o valor das forças. Esta metodologia deve ser muito eficiente e para isso utiliza as derivadas calculadas pelo método contínuo pelo programa PROAES, funcionando em conjunto com a ferramenta de otimização *optimtool* do MATLAB.

1.2 Estrutura da dissertação

A presente dissertação encontra-se dividida em seis capítulos, no primeiro capítulo será feita uma introdução sobre os objetivos, a motivação e a estrutura do estudo realizado. No capítulo 2 será apresentado um estado da arte sobre o tema da otimização de topologia de treliças com incerteza nos parâmetros de projeto. No capítulo 3 será introduzido o programa PROAES e a sua utilização em otimização de topologia, com uma breve explicação do funcionamento do programa e apresentação de exemplos. O capítulo 4 vai expor o método proposto para o estudo de problemas de otimização de topologia com incerteza, e no capítulo 5 estarão os resultados obtidos. Por fim, no capítulo 6 estarão as conclusões do estudo e sugestões para trabalhos futuros.

2. Otimização robusta de topologia

2.1 Otimização estrutural

Os primeiros trabalhos analíticos na área da otimização estrutural foram da autoria de Maxwell (1890) [1] e Michell (1904) [2], mas a grande evolução da otimização estrutural moderna só se daria décadas mais tarde, por exemplo, durante a 2ª guerra mundial já havia a necessidade de projetar componentes para a indústria aeronáutica que fossem otimizados de forma a minimizar o seu peso.

O método dos elementos finitos para análise de estruturas, desenvolvido nos anos 50, com o aparecimento do primeiro computador digital de alta velocidade de processamento, veio revolucionar a capacidade em analisar e projetar estruturas. Durante os primeiros anos de trabalho foi feito um grande investimento em pesquisas para que este método fosse credibilizado como uma ferramenta no mundo da engenharia. Nos anos 70, já era possível analisar modelos com uma dimensão e complexidade que outrora não seria possível com um método analítico. Schmit (1960) [5] propôs um novo método que lançou as bases para outros métodos mais atuais, em que combina a análise estrutural por elementos finitos com programação matemática não linear, e assim foi possível criar um método com autonomia capaz de analisar uma vasta gama de estruturas [13]. No início, as aplicações restringiam-se a estruturas de treliças, em que as variáveis de projeto eram as áreas de secção das barras. Com o passar do tempo já se incluíam as dimensões de área das vigas e a espessura das placas. Antes de se usar o computador como ferramenta de otimização a obtenção de soluções eficientes para o projeto de estruturas dependia fundamentalmente da experiência do projetista, que frequente procedia a uma sequência de cálculos na tentativa de obter o conjunto de parâmetros mais adequado.

A otimização estrutural teve uma evolução temporal quase paralela ao método dos elementos finitos (apesar de a programação linear já existir desde o final dos anos 40), mas com

um caminho um pouco diferente, visto que é uma ferramenta de projeto dependente da evolução dos métodos de análise e cálculo.

Uma das razões que tem levado à procura contínua para melhorar e desenvolver metodologias de otimização estrutural é a necessidade de suportar modelos de estudo com um elevado número de variáveis, que podem chegar às centenas ou milhares. Ao mesmo tempo, uma simples análise estrutural, em que se verificam os constrangimentos e a função objetivo, significa um grande custo computacional, pois representa a resolução de milhares de equações algébricas em cada iteração. Este processo é ilustrado na Figura 1.

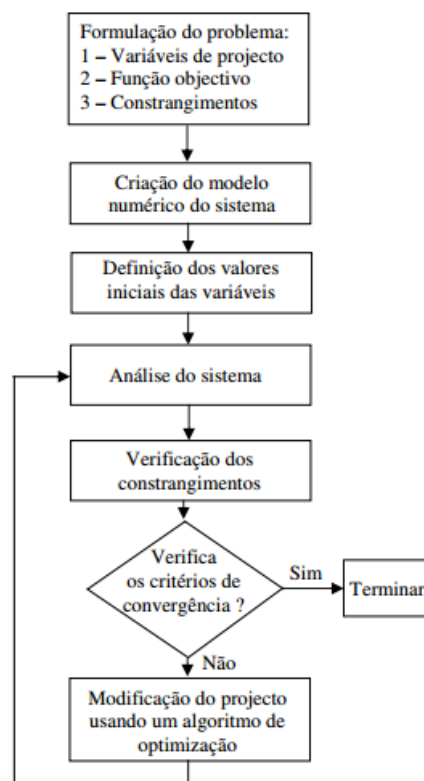


Figura 1 - Processo iterativo de otimização estrutural, adaptado de [6]

2.1.1 Formulação de um problema de otimização

A formulação usada na resolução de um problema de otimização estrutural é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar:} \quad & f(x) \\
 \text{Sujeito a:} \quad & g_j(x) \leq 0; \quad j = 1:m \\
 & h_k(x) = 0; \quad k = 1:p \\
 & {}^l x_i \leq x_i \leq {}^u x_i \quad i = 1:n
 \end{aligned} \tag{1}$$

Onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ é o vetor das n variáveis de projeto, $f(x)$ é a função objetivo, $g_j(x)$ e $h_k(x)$ são os m constrangimentos de desigualdade e os p constrangimentos de igualdade, e ${}^l x_k$ e ${}^u x_k$ são, respetivamente os limites inferior e superior que as variáveis de projeto x_i podem tomar.

A função objetivo e a função dos constrangimentos dependem apenas das variáveis de projeto, o número de constrangimentos de igualdade tem de ser inferior ou igual ao número de variáveis de projeto, ou seja $m \leq p$.

Se:

- $m < p$, existe uma solução ótima para o problema;
- $m = p$, o valor ótimo é solução dos constrangimentos de igualdade;
- $m > p$, o sistema de equações é indeterminado.

Não existe um limite no número de constrangimentos de desigualdade. Se a função objetivo f e as funções h e g forem lineares, é um problema de programação linear, se uma dessas funções for não linear é um problema de programação não linear.

Um exemplo de uma função objetivo é o peso ou o custo de uma estrutura, que por norma há sempre o interesse em minimizar. Na Tabela 1 podemos ver exemplos de funções objetivo, variáveis de projeto e os constrangimentos mais utilizados.

Tabela 1 - Exemplos de função objetivo, variáveis de projeto e constrangimentos utilizados em otimização estrutural, adaptado de [6]

Função objetivo	Variáveis de projeto	Constrangimentos
<ul style="list-style-type: none"> • Peso • Custo 	<ul style="list-style-type: none"> • Dimensões • Forma • Topologia 	<ul style="list-style-type: none"> • Tensão • Deslocamento • Fiabilidade

A otimização estrutural pode ser dividida em três categorias principais, sendo estas: otimização dimensional, otimização de forma e a otimização de topologia.

2.1.2 Otimização dimensional

Nos anos 60, os primeiros problemas de otimização estrutural eram sobretudo problemas em que se procurava redimensionar as dimensões de uma estrutura. Neste caso, as variáveis de projeto são, por exemplo as secções transversais das barras que compõe uma treliça, ao longo deste processo, a forma e a topologia da treliça permanecem inalteradas. A gama de valores que estas variáveis assumem podem ser discretos ou contínuos, no caso das treliças se houver a limitação de escolher a secção a partir de uma lista de perfis normalizados é um caso discreto, se não for necessário respeitar uma norma, o algoritmo pode escolher um valor contínuo entre um limite inferior e um limite superior. O caso de uma análise com variáveis discretas é um problema de análise combinatória. A Figura 2 ilustra um caso de uma otimização de dimensões onde os diâmetros das secções transversais são as variáveis de projeto.

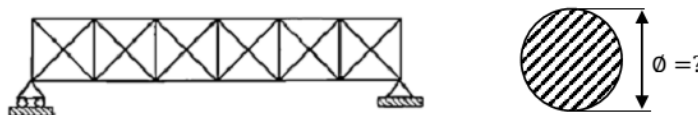


Figura 2 - Exemplo de otimização dimensional, adaptado de [14]

2.1.3 Otimização de forma

Na década de 70 surgiu um novo tipo de otimização que veio complementar a otimização dimensional. Num processo de otimização de forma, a variável de projeto é a fronteira da estrutura, ou seja, as coordenadas dos nós que ligam os elementos, uma linha ou uma superfície. A topologia da estrutura e as características dos elementos, como a sua área de secção transversal, são definidas de início e são constantes ao longo do processo de otimização de forma. Este tem como objetivo calcular o conjunto de valores das variáveis geométricas (forma ótima da fronteira) que minimizam a função objetivo do problema [6]. Na Figura 3 encontram-se dois exemplos de otimização de forma.

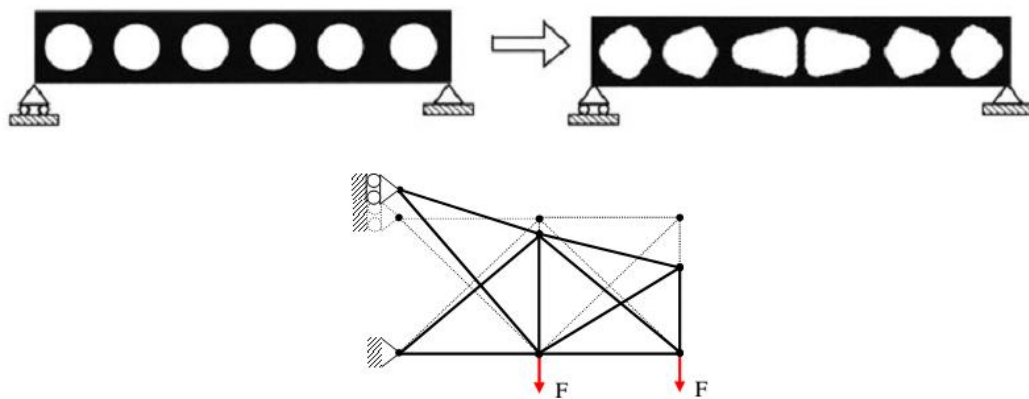


Figura 3 - Processos de otimização de forma, adaptado de [6], [14]

Este processo, tal como a otimização dimensional, apresenta algumas limitações. Estes podem ser utilizados em conjunto para obter melhores resultados do que quando são utilizados individualmente, apesar de existir sempre uma limitação devido ao facto da sua topologia estar pré-definida, mantendo-se constante durante todo o processo não sofrendo qualquer melhoria.

2.1.4 Otimização de topologia

A otimização de topologia tem como objetivo encontrar a solução ótima para a estrutura dentro de um domínio pré-definido de elementos ou material e pode ser dividida em duas categorias diferentes: a otimização de topologia a partir de um meio contínuo ou otimização a partir de um meio discreto.

No caso do meio contínuo, este consiste em determinar se para cada ponto de um domínio existe ou não material, sendo que é possível pré-definir regiões com ou sem material, como é possível observar na Figura 4.

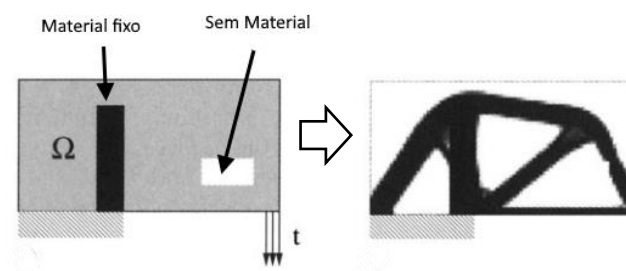


Figura 4 - Exemplo de otimização de topologia num meio contínuo com pré definição de material, adaptado de [14]

A função objetivo da otimização num meio contínuo trabalha com variáveis booleanas (0 ou 1), sendo que 1 significa a presença de material e 0 a sua ausência. Para a resolução deste

tipo de problemas existem diversos métodos que podem ser aplicados, como o *Hard-kill Optimization* (também conhecido por *Fully Stressed Design Technique*). Este método consiste em considerar que o domínio Ω da estrutura é um meio contínuo discretizado por uma malha de elementos finitos (EF). Em seguida é calculado o campo de tensões nesse domínio com uma análise de EF, após ser estabelecida uma função que relacione estes resultados e o módulo de elasticidade do material, essa função vai determinar se um elemento finito da malha vai ter ou não material na próxima análise. Assim se procede até ser satisfeito o critério de paragem. Um exemplo deste tipo de otimização está representado na Figura 5.

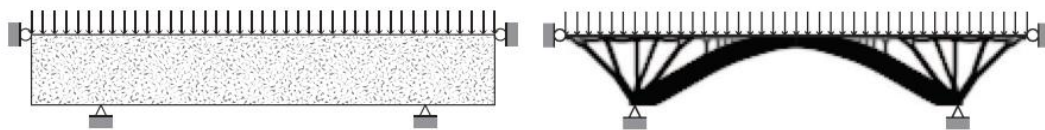


Figura 5 - Exemplo de otimização de topologia num meio contínuo, adaptado de [9]

A otimização de topologia em meio discreto é geralmente aplicada na otimização de estruturas reticuladas e tem como base o método conhecido por *Ground Structure Method* (GSM), este método está representado na Figura 6(a). Esta abordagem tem como ponto de partida uma topologia inicial com n nós (N graus de liberdade) e m ligações ou elementos entre si. Procura encontrar os nós e elementos que constituem a subestrutura ótima dentro da *Ground Structure* inicial. Neste caso, as variáveis de projeto são as áreas das secções transversais dos elementos, se o valor for inferior a um valor mínimo pré-definido, esse elemento não vai fazer parte da topologia final. Na Figura 6(b) pode-se observar um exemplo de uma aplicação para este método, partindo de uma topologia inicial com 13 barras, a solução para o problema foi uma treliça com apenas 6 barras.

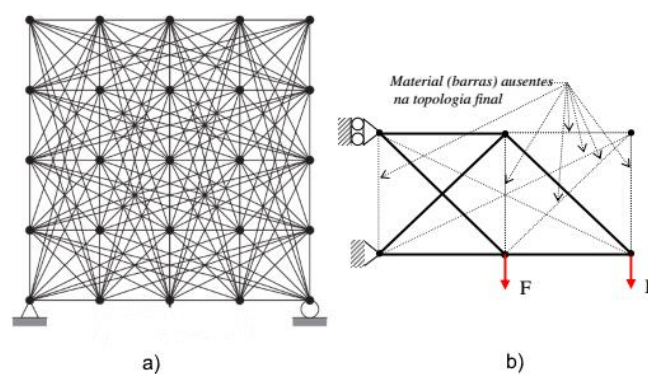


Figura 6 - a) Exemplo de uma *Ground Structure*, b) Exemplo de uma otimização de topologia, adaptado de [6], [14]

É possível também recorrer a uma combinação dos três tipos de otimização descritos anteriormente, com variáveis de topologia (nós e elementos), variáveis de forma (posição dos nós)

e variáveis dimensionais (área da secção transversal). Esta combinação permite obter uma solução para o projeto de uma estrutura muito mais eficiente que aquela que seria obtida com apenas um dos tipos de otimização referidos.

2.2 Otimização considerando incerteza

Num cenário perfeito os valores encontrados no fim de todos os cálculos necessários durante a idealização e conceção da estrutura seriam suficientes. Na vida real, é preciso ter em conta diversos fatores de incerteza que podem ter um impacto significativo no ciclo de vida das estruturas, tal como as propriedades dos materiais, as tolerâncias de fabrico e os esforços ou carregamentos a que estão sujeitas. O uso de um coeficiente de segurança é um método utilizado em engenharia de projeto para que essa incerteza seja tomada em conta. Este é quase um utensílio primitivo que origina um sobredimensionamento exagerado, em que os custos inerentes são muito superiores aos que seriam efetivamente necessários caso essa incerteza pudesse ser quantificada de outra maneira na fase de projeto.

Por isso, a comunidade científica tem vindo a mostrar um grande interesse em desenvolver metodologias que consigam incorporar e quantificar essa incerteza nos parâmetros de projeto em otimização de topologia.

Para lidar com a incerteza dos parâmetros existem de uma maneira geral, duas formulações de problemas de otimização estrutural, otimização estrutural baseada na fiabilidade (*Reliability-Based Design Optimization* – RBDO) e a otimização estrutural robusta (*Robust Design Optimization* – RDO) [10].

2.2.1 Otimização baseada em fiabilidade – RBDO

Uma solução fiável é aquela que satisfaz o critério de projeto mesmo com algumas incertezas nas variáveis de projeto ou nos parâmetros do problema. A fiabilidade é medida pela probabilidade de cumprir um critério de projeto. Um processo de otimização que incorpore constrangimentos de fiabilidade nos seus cálculos e formulação é denominada otimização estrutural baseada em fiabilidade RBDO. Na formulação de RBDO é definido um constrangimento de fiabilidade para que a probabilidade de haver uma violação do constrangimento original seja menor de que um valor específico (definido). O facto de a fiabilidade ser imposta no constrangimento em RBDO contrasta com a formulação da RDO onde a robustez é imposta na função objetivo [15]. Para uma melhor compreensão sobre esta temática consultar Nikolaidis et al [16] Choi et al [17].

O princípio básico da RBDO é transformar os constrangimentos do problema de otimização em constrangimentos baseados em fiabilidade. Este procedimento de transformação tem como base a utilização de conceitos de probabilidades e estatística e a análise de fiabilidade.

2.2.1.1 Fiabilidade

A fiabilidade de uma estrutura caracteriza-se pela sua capacidade de resposta aos carregamentos a que é sujeita, resistência e rigidez [18]. Para estudar essa resposta aos carregamentos, e saber se satisfaz um conjunto de requisitos, como por exemplo: segurança de colapso e variação na geometria, estes requisitos são associados a estados limite e a violação desses estados definem a validação ou não do projeto em causa.

Pode-se então concluir que o estudo da análise de fiabilidade estrutural pretende calcular a probabilidade de falha, ou seja, a probabilidade de durante o tempo de vida de uma estrutura haver uma violação de um ou mais estados limite.

O coeficiente de variação δ_X , de uma variável X quantifica a incerteza associada a essa variável X , e é definido pelo rácio entre o desvio padrão e a média:

$$\delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (2)$$

A média e o desvio padrão são respetivamente, o momento de primeira ordem e a raiz quadrada do momento de segunda ordem (a variância).

O índice de fiabilidade associado a um estado limite é definido pelo rácio entre a média e o desvio padrão dos valores dessa função de estado limite:

$$\beta = \frac{\mu_X}{\sigma_X} \quad (3)$$

Este índice de fiabilidade pode ser interpretado como a distância da média dos valores da função de estado limite para a origem do referencial no espaço normalizado. Por isso é de interesse que β seja o mais elevado possível.

2.2.1.2 Função de estado limite

Em análise de fiabilidade estrutural, um estado limite indica a margem de segurança entre a resistência e o carregamento a que a estrutura está a ser solicitada [15]. Para uma variável aleatória X , a função de estado limite (G) e a probabilidade de falha (Pf) são definidas por:

$$G(X) = R(X) - S(X) \quad (4)$$

$$Pf = P[G(X) \leq 0] = \int_{G(X) < 0} f_G(x) dx \quad (5)$$

Em que R é a resistência da estrutura e S os carregamentos, f_G a função densidade de probabilidade da função de estado limite, $G(X) \leq 0$, $G(X) = 0$ e $G(X) \geq 0$ definem a região de falha, a superfície de falha e a região de segurança, respectivamente. Na Figura 7, encontra-se representada a função de densidade de probabilidade do estado limite $G(X)$.

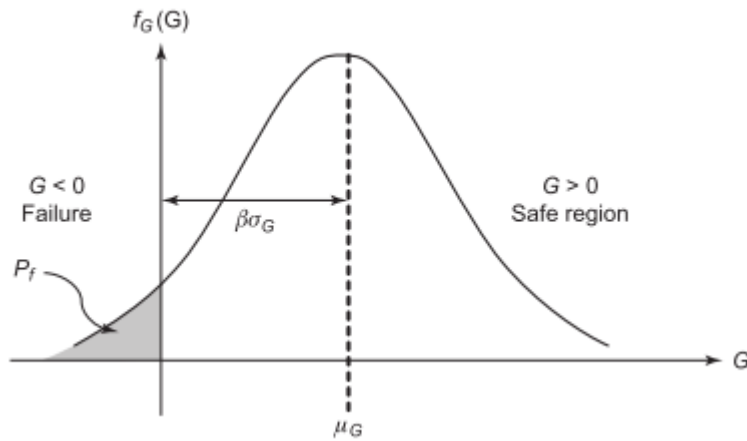


Figura 7 – Função densidade de probabilidade do estado limite G

O coeficiente de correlação é uma medida adimensional de correlação entre duas variáveis e, é definido por (para o caso do desvio padrão):

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (6)$$

Utilizando a equação (4) e (6), a média e o desvio padrão de $G(X)$ são obtidos por:

$$\mu_G = \mu_R - \mu_S \quad (7)$$

$$\sigma_G = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho_{RS}\sigma_R\sigma_S} \quad (8)$$

em que μ_R , μ_S , σ_R , σ_S e ρ_{RS} são respectivamente a média e o desvio padrão de R e S , e o coeficiente de correlação entre R e S .

Considerando que R e S são duas variáveis independentes e têm uma distribuição normal, vem que o coeficiente de correlação é nulo. Então a equação (5) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (9)$$

em que Φ é a função distribuição acumulada da distribuição normal.

2.2.1.3 Formulação de um problema de RBDO

A otimização de uma estrutura utilizando as metodologias de análise de fiabilidade de estruturas, considera que a incerteza associada é representada através de variáveis aleatórias caracterizadas por terem distribuições probabilísticas (normal, logonormal, gumbel, etc) e parâmetros como a média e o desvio padrão. Um problema de otimização estrutural baseado em fiabilidade pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(\mu_X) \\ &\text{sujeito a:} && g_i(X) < 0 \\ &&& {}^l\mu_{X_r} \leq \mu_{X_r} \leq {}^u\mu_{X_r}; r = 1, \dots, n_X \end{aligned} \quad (10)$$

Onde $f(\mu_X)$ é a função objetivo, normalmente o peso ou o custo da estrutura, μ_X é o vetor das médias das variáveis de projeto com limites inferior e superior definidos pelos vetores ${}^l\mu_{X_r}$ e ${}^u\mu_{X_r}$ respetivamente, e g_i representa o vetor dos constrangimentos, que tem incluído pelo menos um constrangimento de fiabilidade. O vetor das variáveis de projeto, μ_X , inclui os parâmetros que definem estatisticamente as variáveis aleatórias como as distribuições probabilísticas e a sua média e desvio padrão. Os constrangimentos de fiabilidade podem assumir duas formas, dependendo se a avaliação da fiabilidade da estrutura for feita tendo em conta a probabilidade de falha P_f ou o índice de fiabilidade β :

$$g_i = \frac{P_f - P_{max}}{P_{max}} \leq 0 \quad (11)$$

$$g_i = \frac{\beta_{min} - \beta}{\beta_{min}} \leq 0 \quad (12)$$

em que P_{max} é o limite superior imposto à probabilidade de falha associada a um possível modo de colapso da estrutura, que é definido por uma função de estado limite, e β_{min} é o índice de fiabilidade mínimo correspondente [19].

Têm sido desenvolvidos vários métodos para a integração do conceito de probabilidade na análise de fiabilidade em estruturas, visto que nem sempre é possível ter a informação completa sobre as distribuições das funções de densidade da probabilidade de falha (ou resistência), tal como da função de estado limite, e por isso o cálculo do integral é uma tarefa muito difícil. E

mesmo em casos que existam esses dados, se o número de variáveis for muito elevado, o cálculo computacional do integral é praticamente inviável [20]. Para contornar estes problemas foram propostos métodos de análise de fiabilidade de nível II, em que é utilizado o conceito de índice de fiabilidade [21]. Estes métodos utilizam aproximações da superfície de estado limite que podem ser de primeira ordem (FORM) com aproximações lineares [22], ou de segunda ordem (SORM) com aproximações quadráticas [23] e que a distribuição normal pode ser usada para estimar a fiabilidade da estrutura. A ideia é de que a função de densidade da distribuição normal decresce de uma maneira acentuada conforme se afasta da origem, e assim limitando a sua contribuição para o integral da equação (5) a apenas pontos na vizinhança do ponto mais provável de falha(MPP) com a menor distância para a origem tem importância significativa.

No contexto de otimização de topologia, o ponto mais provável de falha tem de ser calculado em cada iteração do processo de otimização, isto leva a que seja preciso um algoritmo com dois ciclos, [24] [25] um correspondente ao algoritmo de otimização e o outro ao algoritmo FORM (ou SORM), e isto pode levar a um modelo computacional muito pesado ou mesmo intratável, visto que em cada iteração do algoritmo de otimização é necessário calcular a fiabilidade associada às várias funções de estado limite. Tu et al [26] afirma que usar a definição de Hasofer-Lind [22] para definir o índice de fiabilidade pode provocar problemas na convergência quando se procura o ponto mais provável de falha e que existe a possibilidade de não serem encontradas soluções. Para uma revisão sobre métodos de ciclo simples e duplo ciclo consultar [27] e para mais aplicações de RBDO consultar Tsompanakis et al [28].

Para finalizar, pode-se dizer que, de uma maneira geral, a RBDO apresenta algumas limitações como a baixa eficiência computacional ou os problemas de convergência do algoritmo. Também é de referir que apenas num pequeno número de casos especializados é possível encontrar toda a informação estatística sobre os parâmetros estruturais. E os pressupostos inadequados que possam ser assumidos sobre a distribuição probabilística podem levar a erros consideráveis na análise de fiabilidade. Por isso a RBDO não tem muito interesse prático ou eficácia se não se estiver na posse de toda a informação sobre a incerteza dos parâmetros ou os dados necessários para uma análise de fiabilidade eficaz [29].

2.2.2 Otimização Robusta - RDO

O que é um projeto robusto? Ou o que significa robustez? Taguchi (1987) [12], um pioneiro em RD (*Robust Design*) definiu robustez com a seguinte frase: “Robustez é um estado em que a tecnologia, o produto ou o desempenho de um processo tem uma sensibilidade mínima para com os fatores que causam variabilidade (seja no fabrico ou no ambiente de utilização) e que envelhece com um menor custo unitário”. O conceito de robustez tem sido desenvolvido para aumentar a qualidade e fiabilidade de um produto ou projeto, e dos processos de fabrico em engenharia industrial [12].

Na Figura 8 está representada uma função $f(x)$ que se pretende minimizar e depende apenas da variável de projeto x . O constrangimento imposto não permite que x assumira um valor inferior a k . Em otimização clássica o valor dentro da região admissível que é solução do problema de minimização é $x = \omega$, como já foi referido antes, sistemas que são otimizados de forma determinística são muito sensíveis a pequenas alterações, e isso exemplifica-se na Figura 8. Para uma pequena variação δ , que pode ser a tolerância de fabrico ou a variação do módulo de elasticidade de um material, existe uma grande flutuação do valor da função objetivo para um valor na vizinhança de $x = \omega$. Em contraste o ponto $x = \psi$ apresenta uma menor flutuação do valor da função objetivo, para o mesmo valor da variação δ , apesar de $f(\psi) > f(\omega)$, ou seja, para uma situação de escolha, sabe-se que o valor de $f(\psi)$ não apresentará uma grande variação, enquanto que $f(\omega)$ pode variar muito em relação ao esperado. Isto significa que $f(x)$ apresenta uma maior robustez no ponto ψ do que no ponto ω .

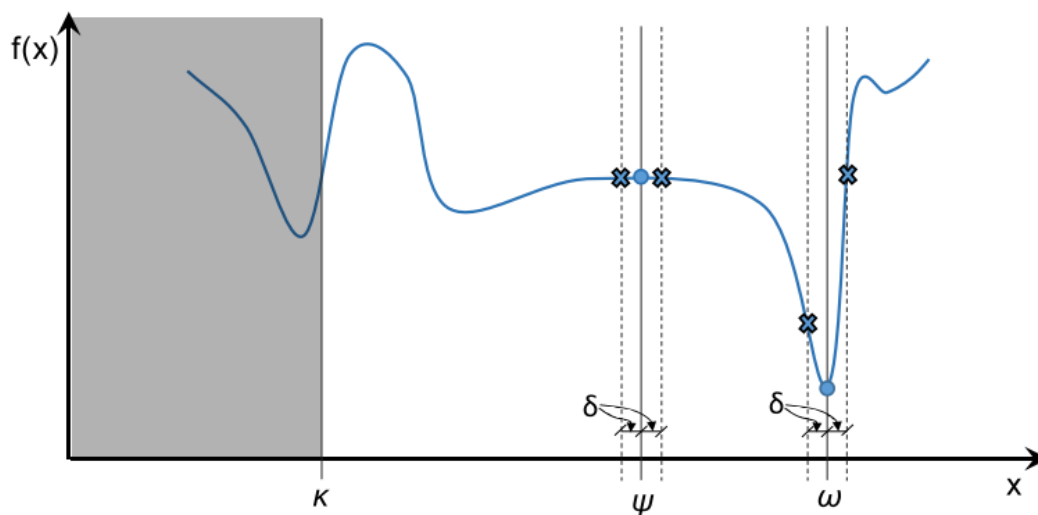


Figura 8 – Otimização Robusta versus Otimização determinística, adaptado de [30]

2.2.2.1 Taguchi

As primeiras tentativas para incorporar a incerteza associada aos parâmetros no âmbito de projeto de engenharia estão ligadas ao nome de Genichi Taguchi, considerado o “pai do design robusto”. Taguchi idealizou uma metodologia que tinha como objetivo melhorar a qualidade de um produto ou processo, atingindo não só o nível desempenho pretendido, mas também minimizando a variação desempenho que pudesse ter, sem eliminar a causa dessas variações. Esta metodologia pode ser dividida em três fases [7]:

1. Projeto do sistema: determinar os parâmetros básicos do produto e a sua estrutura;
2. Projeto dos parâmetros: otimizar os parâmetros de projeto para alcançar os requisitos de qualidade;
3. Projeto das tolerâncias: ajuste dos parâmetros de projeto obtidos em 2.

Do ponto de vista da otimização matemática, a diferença entre a segunda fase e a terceira fase pode parecer supérflua uma vez que essas duas fases apenas diferem na granularidade com que os parâmetros de projeto são tratados (mesmo assim, é importante dividir estas duas fases, pois podem ocorrer sob restrições muito diferentes, por exemplo, tempo de projeto contra tempo de operação) [7]. Por isso, é de interesse centrar atenções para a segunda fase.

A grande diferença do método de Taguchi quando comparado com a otimização comum reside no facto de ter em consideração as variações de desempenho devido a fatores de ruído que estão fora do controlo do projetista. O método de Taguchi para projeto robusto assenta no uso de matrizes ortogonais. Sendo assim, há que definir dois tipos de parâmetros que vão ser inseridos na função objetivo, os fatores de controlo e os fatores de ruído.

- Fatores de controlo: fatores de controlo são os parâmetros cujas configurações nominais podem ser especificadas durante o processo de projeto. Os fatores de controlo podem ser ajustados para atender ao desempenho do alvo e diminuir a variabilidade do desempenho. A combinação de diferentes níveis dos fatores de controlo forma um conjunto ortogonal designado como a matriz interna;
- Fatores de ruído: os fatores de ruído representam os parâmetros que são impossíveis ou dispendiosos de controlar. Os fatores de ruído fazem com que o desempenho se desvie do alvo e, assim, resulta em perda de qualidade. A combinação dos fatores de ruído é representada pela matriz ortogonal chamada matriz externa. Exemplos de fatores de ruído são as condições de ambiente (temperatura e pressão) e tolerâncias de produção (variações no peso e dimensões, pureza do material utilizado).

A função perda quantifica a perda de desempenho de um produto no seu desempenho esperado devido a uma variação. Esta função no método de Taguchi é definida como uma função quadrática da variação do desempenho [15]

$$L(f) = k(f - m_f)^2 \quad (13)$$

onde L é a função de perda, m_f é o valor alvo para a função objetivo f , e $k > 0$ é uma constante.

Esta equação pode ser reescrita da seguinte maneira [15]:

$$\eta = 10 \log_{10} \frac{\mu_f^2}{\sigma_f^2} \quad (14)$$

e representa o rácio entre o poder do sinal μ_f em relação ao poder do ruído σ_f , e este rácio denomina-se *Signal-to-noise* (S/N). O poder do sinal refere-se à propriedade que o projetista

quer melhorar, neste caso quer alcançar o valor de m_f , o poder do ruído é a quantidade de incerteza (variância). O objetivo é encontrar o conjunto de valores que minimizam a função de perda, ou seja, a influencia do ruído, isto é o equivalente a maximizar o rácio S/N, obtendo uma solução robusta.

Embora o método de design robusto de Taguchi seja muito popular na prática de engenharia, existem algumas críticas às suas limitações, por exemplo, Schimidt e Launsby [31] referem que o método de Taguchi tem a desvantagem de não fornecer nenhuma informação sobre a direção a seguir para melhorar o design além do leque dos fatores de controlo considerados. Por isso os resultados obtidos estarão sempre confinados a uma gama de fatores que foram testados. Logo, este tipo de abordagem depende muito da seleção do nível dos fatores. Para além disso, já foi reconhecido que o método de Taguchi é fraco a manipular as interações entre os fatores de controlo [32].

2.2.2.2 Revisão de literatura

A maioria dos trabalhos nesta área concentram-se em trabalhar a incerteza em parâmetros de projeto como os carregamentos, a geometria da estrutura ou as propriedades dos materiais. Estes dois últimos parâmetros apresentam uma dificuldade acrescida para serem trabalhados a nível computacional, ao contrário dos carregamentos externos, isto porque no caso de um exemplo com incerteza na geometria, a resposta da estrutura será em função de uma matriz de rigidez estocástica inversa [33].

Ben-Tal e Nemirovski [34] apresentaram uma abordagem à otimização robusta de topologia com programação semidefinida (*semidefinited programming*) em que a rigidez da treliça é otimizada tendo em conta os carregamentos definidos e pequenos carregamentos ocasionais. Sandgren e Cameron [35] utilizaram uma junção de algoritmos genéticos e de programação não linear para otimização de topologia de treliças com parâmetros gerados de forma aleatória para representar as incertezas, isto resultou num algoritmo muito exigente a nível computacional, visto que era preciso resolver um número muito elevado de estruturas simuladas a cada iteração.

Kanno e Guo [36] desenvolveram um método de programação inteira mista para otimização (*mixed integer programming*) robusta de topologia de treliças em que existem constrangimentos de tensão e incerteza nos carregamentos e pode ser resolvido de maneira global.

Kang e Bai [10] investigaram otimização robusta de topologia de treliças sob variação delimitada da área de secção transversal, bem como a incerteza nas cargas aplicadas. Para representar essas incertezas utilizaram um modelo convexo de uma elipsoide e propuseram uma medida de robustez com base na quantidade de variabilidade que o projeto pode suportar. Portanto, esta metodologia resultou num procedimento de otimização de duplo ciclo, onde o ciclo externo maximiza a robustez por otimização de topologia e o ciclo interno determina o nível atual de robustez do projeto.

Richardson et al [9] apresenta uma abordagem inovadora para análise de estruturas contínuas e de treliças com incerteza no material, em que combina o método dos elementos finitos estocásticos espectrais (SSFEM – *spectral stochastic finite element method*) com uma expansão do caos polinomial para propagar as incertezas na resposta da estrutura. Esses parâmetros incertos são modelados utilizando um campo aleatório espacialmente correlacionado que é discretizado com uma expansão de *Karhunen-Loève*, com especial atenção para a representação da incerteza do material em elementos lineares de uma treliça. Richardson et al [37] estendeu este trabalho para a incorporação da incerteza nos carregamentos. Utiliza-se uma abordagem multiobjetivo para obter as soluções ótimas de Pareto, demonstrando que a média e o desvio padrão da *compliance* podem ser considerados como objetivos separados, evitando o uso de um fator combinatório.

A incerteza na localização dos nós tem como origem os erros de fabricação ou de montagem da estrutura e tem sido uma temática abordada em alguns trabalhos, apesar da sua complexidade devido à necessidade de incorporar as variações na matriz inversa de rigidez. Guest e Igusa [8] utilizaram uma perturbação de segunda ordem (série de Taylor) da matriz inversa de rigidez para derivarem uma expressão analítica que permitisse calcular o valor esperado da *compliance* para problemas discretos e contínuos. Assumindo que o valor da incerteza é muito inferior em relação às dimensões dos elementos da estrutura, então o problema pode ser resolvido como se fosse um caso de incerteza nas cargas aplicadas. Em seguida este trabalho foi estendido por Jalapour et al [38] para incorporar os efeitos da encurvamento que possam surgir do desalinhamento na montagem, tendo em consideração as forças interiores de compressão ou tração que os elementos de uma treliça estão sujeitos. Asadpoure et al [11] desenvolveram uma formulação robusta para um problema de minimização da massa de uma estrutura com incerteza nas propriedades do material, utilizando um método de perturbação para o converter num problema de otimização de topologia determinística aumentada.

Hashimoto e Kanno [39] utilizam uma abordagem não probabilística à otimização robusta de topologia com programação semidefinida tendo em conta a incerteza nos nós da treliça. A localização dos nós é desconhecida, mas é delimitada por uma elipsoide e pretende-se minimizar a *compliance* de acordo com o pior caso.

Fu et al [40] utilizaram um método probabilístico para trabalhar a incerteza no caso da localização desconhecida da posição nos nós. Para contornar a dificuldade que é o cômputo da matriz inversa da rigidez é utilizada a expansão em séries de Neumann, desta forma o problema é transformado num problema de otimização determinística em que se pretende minimizar apenas o valor esperado da *compliance*,

2.2.2.3 Formulação de um problema de otimização robusta - RDO

Ao contrário dos problemas na otimização estrutural clássica, atualmente não existe uma formulação para um problema de otimização robusta que seja considerada única [7]. A otimização robusta tenta reduzir a dispersão da função objetivo tendo em conta a incerteza, dado que a dispersão é equivalente à sensibilidade. Isto implica que o desvio padrão da função objetivo tem de ser minimizado, e como o valor médio da função objetivo tem de ser simultaneamente minimizado, esta otimização torna-se um problema de otimização multiobjectivo. Para resolver este problema utiliza-se o método da soma ponderada e assim define-se a seguinte equação da função objetivo para otimização robusta [15]:

$$f = \omega_\mu \mu_f + \omega_\sigma \sigma_f \quad (15)$$

onde ω_μ e ω_σ são os coeficientes de peso (números reais não negativos), μ_f e σ_f são a média e o desvio padrão da função f . Se o valor de ω_μ for elevado há uma maior ênfase em obter uma minimização da função objetivo em vez de uma solução robusta e vice-versa.

Para se obter uma expressão normalizada da função f , substitui-se os coeficientes de peso por $\omega_\mu = \frac{\alpha}{\mu^*}$ e $\omega_\sigma = \frac{(1-\alpha)}{\sigma^*}$, em que α é um número real não negativo e assume valores entre 0 e 1, μ^* é o valor esperado para quando $(\omega_\mu, \omega_\sigma) = (1,0)$, e σ^* é o desvio padrão quando $(\omega_\mu, \omega_\sigma) = (0,1)$, sendo assim a equação (16) representa a função objetivo normalizada:

$$f = \alpha \frac{\mu_f}{\mu^*} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_f}{\sigma^*} \quad (16)$$

Desta forma, o coeficiente de peso α mostra a importância relativa de cada objetivo. Se $\alpha = 1$ o problema é um simples problema de minimização do valor esperado e, se $\alpha = 0$ é um problema de minimização do desvio padrão.

No caso em que temos variáveis não correlacionadas, a variância da função f pode ser obtida [15] pela equação (17):

$$\text{var } f = \sigma_f^2 = \sum_{i=1}^{NV} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{(x_i)}^2 \quad (17)$$

Esta expressão foi deduzida a partir das séries de Taylor aplicadas à função f no ponto do valor médio μ_i e representa uma aproximação do primeiro grau. A sua dedução completa pode ser encontrada em [7] ou [15].

2.2.3 Comparação entre RBDO e RDO

Comparado com a RBDO, o design robusto é um conceito relativamente recente em engenharia estrutural. Sendo duas formulações não determinísticas, ambas procuram incorporar variações aleatórias no desempenho nas etapas do processo de projeto, e por vezes não estão bem distinguidas na literatura. Existem algumas diferenças em aspetos fundamentais entre as duas, apesar do facto de que uma solução robusta apresenta uma boa fiabilidade.

A robustez de uma estrutura é avaliada pela variabilidade do desempenho em torno do valor médio, na maioria das vezes pelo seu desvio padrão, enquanto a fiabilidade está relacionada com a probabilidade de ocorrência de falha, como está representado na Figura 9.

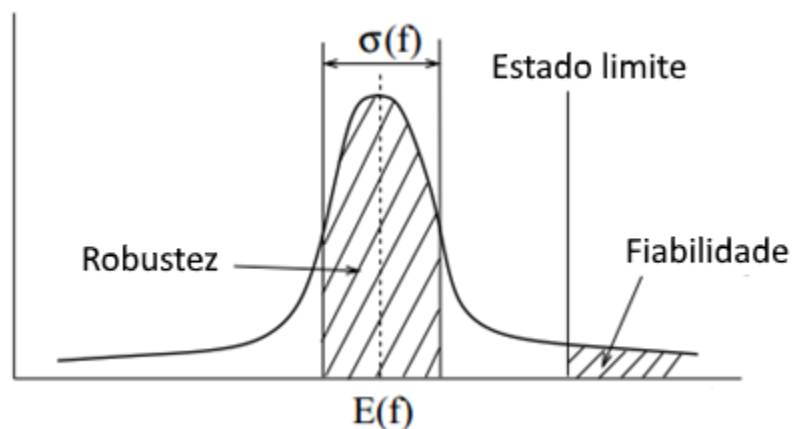


Figura 9 – Comparação entre robustez e fiabilidade estrutural

A RBDO presta especial atenção à segurança de uma estrutura em caso de um evento extremo ou catastrófico, enquanto que o ênfase da RDO é estudar o comportamento da estrutura sob as variações quotidianas do sistema durante o tempo útil de vida. Na Figura 10 encontram-se os diferentes cenários relacionados com os problemas formulados com RBDO e RBO.

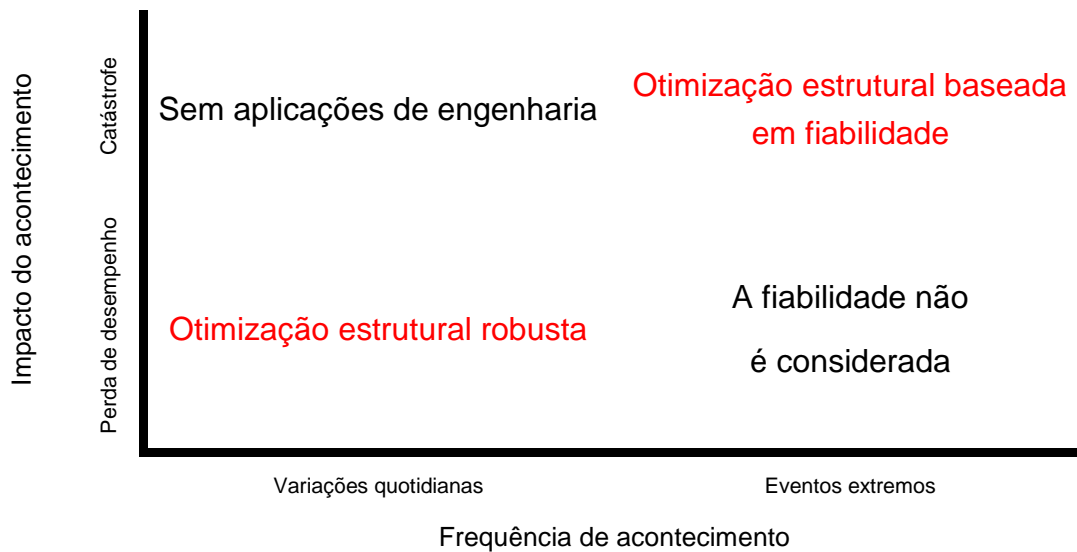


Figura 10 - Os diferentes cenários abordados em RBDO e RBO, adaptado de [41]

A aplicabilidade da RBDO depende da disponibilidade da descrição precisa sobre as distribuições dos parâmetros estocásticos, o que torna a RBDO fortemente dependente de pressupostos sobre a distribuição probabilística das variáveis aleatórias [42]. No entanto, a descrição precisa dos parâmetros de desempenho estrutural não é um motivo de preocupação na formulação de um problema de projeto de robustez como é num problema de projeto com base em fiabilidade.

Finalmente, nos problemas de RBDO é necessária uma função de estado limite para definir a falha do sistema estrutural. No entanto, uma função de estado limite adequada nem sempre pode ser definida explicitamente em problemas de engenharia prática. Nessas circunstâncias, pode ser mais realista procurar um projeto que reduza as dispersões de desempenho, como um design robusto.

De uma forma sumária, a Tabela 2 apresenta as diferenças entre as formulações de RDO e RBDO.

Tabela 2 - Comparação entre RBO e RBDO

	RDO	RBDO
<i>Input</i>	Média e desvio padrão	Função de densidade ou função acumulada
Objetivo	Reduzir a variabilidade	Minimização com constrangimentos probabilísticos
Tipo de análise	Análise das variações	Análise de fiabilidade
Estratégia	Reduzir a variação	Mover o valor médio

3. Utilização do PROAES em otimização de topologia

3.1 Introdução

O PROAES é um programa que foi desenvolvido em linguagem MATLAB e é composto por um conjunto de módulos que permitem realizar várias análises. A última versão do programa disponível é o PROAES 5.0 [43] e apresenta uma nova estrutura que se encontra dividida em várias sub-rotinas, tendo sido adicionadas novas funcionalidades em relação à versão 4.1. As capacidades do programa são as seguintes:

1. Realizar a análise de modelos estruturais pelo método de elementos finitos;
2. Calcular derivadas de funções associadas ao desempenho estrutural (performances) em ordem a variáveis de projeto;
3. Realizar a análise de fiabilidade de modelos estruturais pelo método FORM;
4. Otimizar modelos de estruturas, considerando constrangimentos associados a medidas de desempenho estrutural e/ou medidas de fiabilidade.

Se o utilizador apenas pretender realizar uma análise a uma estrutura pelo método dos elementos finitos só necessita de executar o programa PROAES. Se quiser calcular o índice de fiabilidade de uma estrutura, β , pelo método FORM, já serão utilizados os programas PROAES e PROAES_FORM.

Para utilizar as funcionalidades de otimização é necessário recorrer à ferramenta de otimização do MATLAB, *optimtool*. [43]

3.2 Funcionamento do programa

Nesta secção apresenta-se uma descrição do funcionamento do programa e como pode ser utilizado para realizar otimizações.

Existem três opções para correr o programa executado a partir da janela de comandos do MATLAB:

1. PROAES
2. PROAES('problema')
3. PROAES('problema','o')

No primeiro caso, o programa pergunta (solicita) ao utilizador através da interface gráfica do MATLAB, qual é o nome do ficheiro com a extensão **.inp** que pretende executar e em seguida realiza a análise de elementos finitos.

O ficheiro **'problema'.inp** contém todos os dados da estrutura que se pretende analisar e pode ser criado num programa de editor de texto, será composto por várias linhas em que o primeiro caracter de cada linha vai indicar o tipo de dados presentes e as suas características. Os diferentes tipos de dados aceites na atual versão do PROAES encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3 - Tipo de dados existentes num ficheiro **'problema'.inp**

Tipo de dados	Caracter associado
Nó	n
Elemento	e
Material	m
Secção transversal	s
Factor de carga	k
Força ou momento proporcional a k	z
Força ou momento	f
Carga distribuída	d
Apoio	a
Ponto calculo de tensão	t
Variável	v
Performance	p

Para mais informação sobre a formatação das linhas do ficheiro para cada tipo de dados, recomenda-se a consulta do manual do programa [43].

Na segunda opção, o programa executa imediatamente a análise de elementos finitos com os dados do ficheiro **'problema'.inp**.

Quanto à terceira opção, o programa vai ler os dados do ficheiro **'programa'.inp** e do ficheiro **opt2ef**, e em seguida executa uma análise de elementos finitos e o cálculo das performances e/ou sensibilidades, de acordo com o que estava definido no ficheiro **opt2ef**. Este ficheiro também é definido pelo utilizador e as instruções para a sua formatação podem ser encontradas no manual de utilização. Os resultados obtidos depois do cálculo das performances e/ou sensibilidades são escritos num ficheiro que é criado pelo PROAES, o **ef2opt**, e o seu formato também se encontra explicado no manual.

Em qualquer uma das opções de execução do PROAES, o programa vai criar um ficheiro com a extensão **.out**, que terá o mesmo nome do ficheiro de dados **.inp** indicado para análise. Neste ficheiro, para além dos dados do problema, como por exemplo, a localização dos nós, as forças aplicadas e os apoios, vai conter os resultados da análise de elementos finitos: deslocamentos, tensões nos pontos de cálculo e os esforços internos nos elementos.

O programa PROAES é constituído por um total de 16 sub-rotinas com funções específicas: leitura de dados, realização de cálculos necessários para cada tipo de elemento (sensibilidades, elementos finitos e tensões no ponto) e rotinas de escrita dos resultados em ficheiros. Para fazer esta ligação entre as diversas sub-rotinas existe um módulo principal que chama e executa as sub-rotinas de acordo com o pretendido pelo utilizador. O seu funcionamento pode ser visualizado no fluxograma .Figura 11

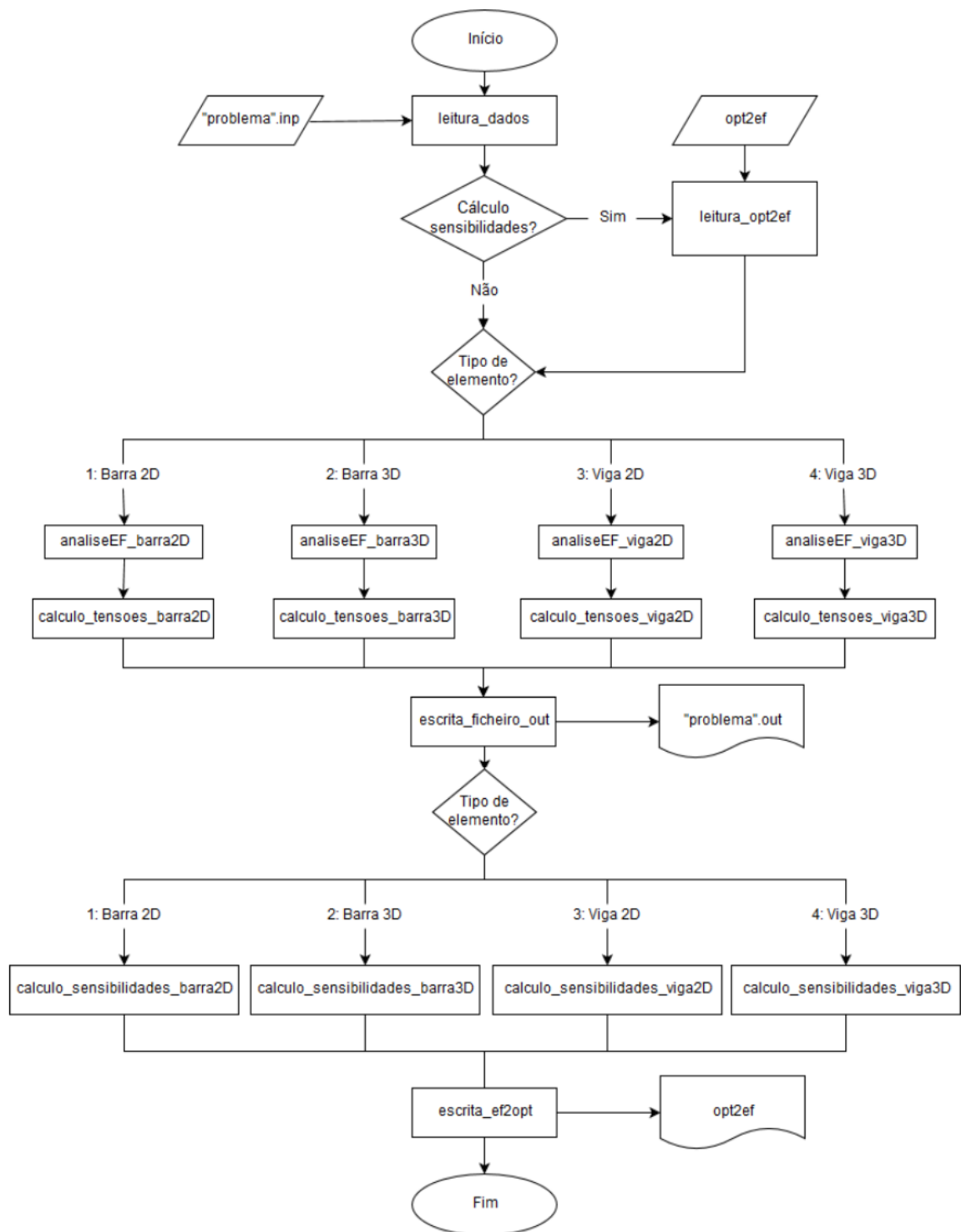


Figura 11 - Estrutura do programa PROAES, adaptado de [44]

3.2.1 Análise de sensibilidades pelo método contínuo

O programa PROAES tem a capacidade de calcular as derivadas das funções associadas ao desempenho estrutural em ordem a variáveis de projeto através do método contínuo de análise de sensibilidades. Este cálculo tem um elevado interesse porque podem ser utilizadas para determinar o índice de fiabilidade de uma estrutura pelo método FORM ou realizar a otimização de uma estrutura através de um algoritmo que precise das derivadas. O método contínuo permite obter valores bastante precisos das derivadas num intervalo de tempo muito curto em comparação com o método das diferenças finitas, e não é sensível ao valor do incremento das variáveis, que origina erros de aproximação.

A versão 5.0 do PROAES permite calcular as derivadas de três medidas de desempenho em relação a cinco tipos de variáveis de projeto, para os quatros tipos de elementos que o programa suporta. Esta versão não permite calcular a derivada da performance tensão num elemento em ordem ao momento de inércia da secção transversal, que só é possível para o tipo de elemento Viga 2D (os elementos do tipo Barra 2D e 3D não possuem momento de inércia da secção transversal). A Tabela 4 apresenta as performances e variáveis de projeto que estão disponíveis no programa PROAES.

Tabela 4 - Performances e variáveis de projeto disponíveis no PROAES

Performances Variáveis	Volume	Deslocamento do nó	Tensão num elemento
Coordenada de um nó	Todos	Todos	Todos exceto Viga 3D
Módulo de elasticidade	Todos	Todos	Todos exceto Viga 3D
Factor de Carga	Todos	Todos	Todos exceto Viga 3D
Área da secção transversal	Todos	Todos	Todos exceto Viga 3D
Inércia da secção transversal	Viga 2D e 3D	Viga 2D e 3D	Viga 2D

3.2.2 Análise de fiabilidade

O PROAES pode ser utilizado para calcular o índice de fiabilidade de uma estrutura, β , pelo método FORM. Para tal foi desenvolvido o PROAES_FORM por Marco Correia[19], com base no trabalho de Baptista de aplicação do algoritmo iHLRF [45]. O programa PROAES_FORM calcula os índices β associados a uma ou várias funções de estado limite que condicionam a

segurança da estrutura. Para definir as funções de estado limite é necessário recorrer ao PROAES que permite calcular a resposta da estrutura e as suas derivadas. O modo de funcionamento do PROAES_FORM é semelhante ao do PROAES e é necessário definir um ficheiro '**problema**'.frm que contem a definição das variáveis aleatórias e as funções de estado limite do problema e outro ficheiro '**problema**'.inp que é o ficheiro de dados do modelo de elementos finitos. A Figura 12 representa o modo de funcionamento e interação entre o PROAES e o PROAES_FORM para uma análise de fiabilidade.

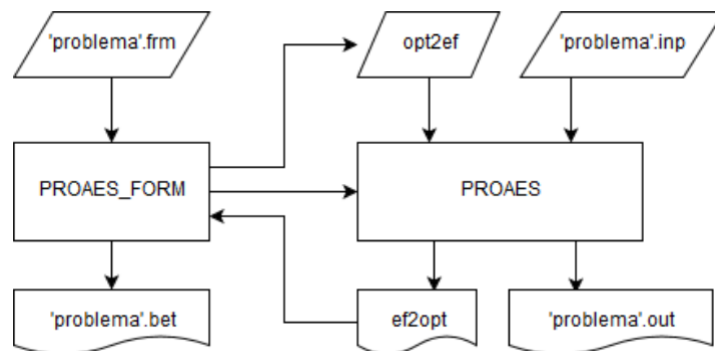


Figura 12 - Interligação entre os programas PROAES e PROAES_FORM, adaptado de [43]

Para saber mais sobre este assunto consultar o trabalho de Marco Correia [19].

3.2.3 Otimização estrutural

O PROAES tem uma grande utilidade para ser aplicado na otimização de estruturas, uma vez que calcula a resposta de uma estrutura e permite alterar os parâmetros que condicionam o problema. Para ser possível a resolução deste tipo de problemas é necessário utilizar o algoritmo de otimização SQP (*Sequential Quadratic Programming*) presente na ferramenta de otimização do MATLAB, *optimtool*.

Esta ferramenta necessita que sejam criados dois ficheiros para definir o problema de otimização, o **myfun_'problema'.m** e **mycon_'problema'.m** que vão efetuar as chamadas ao PROAES para que este calcule a função objectivo e os constrangimentos, respetivamente. Para além destes ficheiros, o utilizador apenas precisa de definir o ficheiro de dados da estrutura (**'problema'.inp**), visto que o ficheiro **opt2ef** é automaticamente escrito pelos ficheiros **myfun_'problema'.m** e **mycon_'problema'.m** em cada iteração do algoritmo.

A otimização com recurso ao PROAES decorre da seguinte maneira:

1. Criação do ficheiro **opt2ef** a partir do *start point* definido no *optimtool*;
2. Cálculo da função objetivo e constrangimentos por parte do PROAES, que escreve os resultados no ficheiro **ef2opt**;

3. Análise do ficheiro **ef2opt** de forma a verificar se foi obtida a solução ótima, caso não se verifique o ficheiro **opt2ef** é alterado pelo algoritmo;
4. Repetição dos passos 2 e 3 até que não seja possível melhorar a estrutura sem violar um dos constrangimentos.

O processo de interligação e troca de ficheiros entre o PROAES e a *optimtool* durante um processo de otimização é exemplificado na Figura 13.

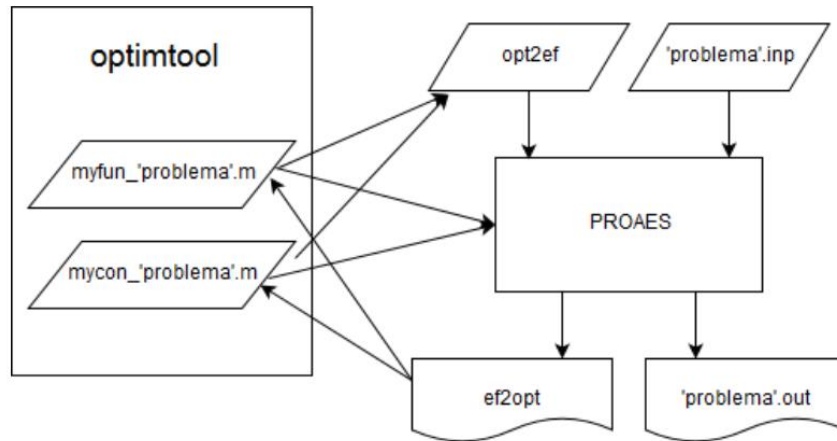


Figura 13 - Interligação entre o programa PROAES e o *optimtool*, adaptado de [43]

3.3 Exemplo de aplicação

Para melhor compreensão do funcionamento do programa e das suas capacidades, apresenta-se a resolução de um problema determinístico de otimização de topologia de treliças.

Este exemplo consiste numa estrutura reticulada (treliça) de duas dimensões (x e y), constituída por 15 nós e 38 elementos do tipo Barra 2D. A estrutura está apoiada nos nós 1, 2 e 3, restringindo os seus deslocamentos na direção horizontal (x) e vertical (y), e tem uma força aplicada no nó 14 segundo a direção vertical com um valor de $P = 100 \text{ N}$. A estrutura encontra-se representada na Figura 14.

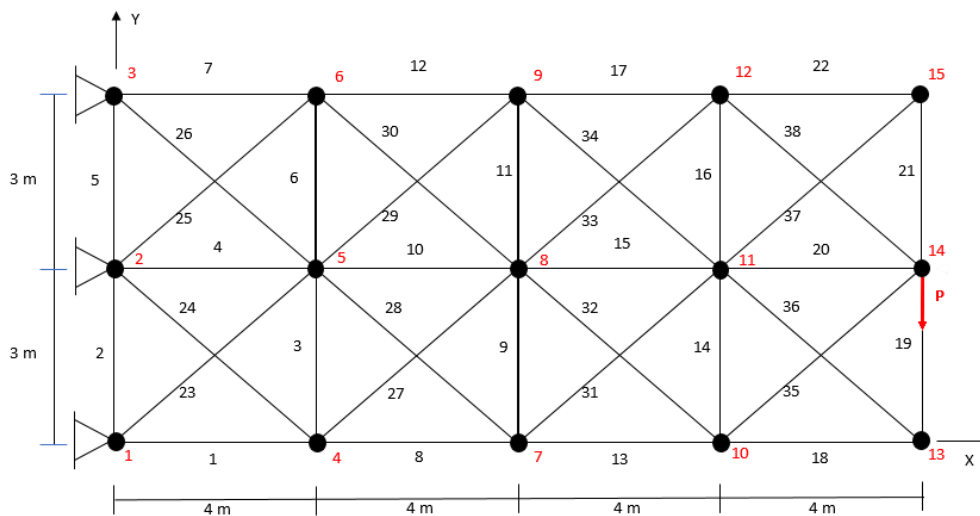


Figura 14 - Treliça 38 Barras - Exemplo determinístico – Configuração Inicial

A relação entre as barras horizontais e verticais é de 4/3, ou seja, todas as barras horizontais têm um comprimento de 4 m e as verticais de 3 m, as barras obliquas têm 5 m de comprimento.

Todas as barras que compõem a estrutura são constituídas pelo mesmo material com um módulo de elasticidade de 210 GPa, e possuem todas a mesma área de secção transversal inicial, $3,14159 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

Tal como já foi referido anteriormente, num problema de otimização é preciso definir qual o objetivo que se pretende alcançar (função objetivo) e quais os constrangimentos a que estrutura vai estar sujeita durante o processo. No exemplo apresentado, o objetivo é de minimizar a *compliance* (flexibilidade) da estrutura, que é o equivalente a maximizar a sua rigidez, aplicando um constrangimento no volume total que é admissível para a sua topologia final, definindo um valor limite.

Sabendo que $\{f\} = [K]\{d\}$, a expressão da *compliance* para este caso é dada por $[C] = \{f\}^T \{d\}$, e visto que a força é constante, a minimização da *compliance* é o equivalente a minimizar o deslocamento vertical no nó 14, onde está aplicada a força. O constrangimento é o volume total da estrutura final. Deste modo a variável de projeto será a área de secção transversal de cada barra da estrutura, num total de 38 variáveis. Estas barras vão ter um limite inferior de uma ordem de grandeza muito inferior ao valor inicial, para definir se a barra fará parte da solução final da estrutura após otimização.

Para o valor do volume admissível, considera-se que a estrutura que será a solução final tem de ter um volume máximo de 10% do valor inicial, então esse valor é facilmente calculado pois como todas as barras possuem a mesma área de secção transversal (12 barras horizontais, 10 barras verticais e 16 barras oblíquas):

$$V_i = (12 \times 4 + 10 \times 3 \text{ m} + 16 \times 5 \text{ m}) \times 3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 4.9637 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$V_{adm} = 0.1 \times V_i = 4.9637 \times 10^{-1} \text{ m}^3$$

Sendo assim a formulação do problema de otimização

$$\text{minimizar } d_{14}$$

$$A_i$$

sujeito a:

$$\sum A_i \times L_i \leq V_{adm} = 4.9637 \times 10^{-1} \text{ m}^3 ; i = 1:N \quad (18)$$

$$1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 < A_i < 3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2 ; i = 1:N$$

Para a resolução deste problema utilizando o método descrito neste capítulo, com a utilização do PROAES em conjunto com a ferramenta do MATLAB, *optimtool*, é preciso criar 3 ficheiros:

- **trelica_38.inp**
- **myfun_trelica_38.m**
- **mycon_trelica_38.m**

O primeiro ficheiro a ser criado é o **trelica_38.inp**, onde são definidos todos os dados da estrutura (coordenadas dos nós, elementos, forças aplicadas, material, ...), para serem lidos no PROAES, e os parâmetros essenciais como as variáveis de projeto e as *performances*. Como referido, a variável de projeto é a área da secção transversal de cada uma das barras, por isso é preciso definir 38 valores de secção (s) para que cada barra possa ter um valor individual. As *performances* do problema vão ser o volume total e o deslocamento no nó 14 (ponto de aplicação da força).

A função objetivo é definida escrevendo o ficheiro **myfun_trellica_38.m**. Este ficheiro tem como função escrever o ficheiro **opt2ef** e chamar o PROAES com o ficheiro de dados. Este realiza os cálculos da performance do deslocamento, que é o objetivo do problema, e o cálculo das sensibilidades desta performance em relação às variáveis de projeto.

O constrangimento do volume é definido no ficheiro criado com o nome **mycon_trellica_38.m**. À semelhança do ficheiro da função objetivo, descrito no parágrafo anterior, este ficheiro também tem como responsabilidade escrever o ficheiro **opt2ef** e chamar o PROAES. Este executa os cálculos necessários para verificar se a solução que foi calculada cumpre ou não com o constrangimento definido no problema, e caso não se verifique, continuar com o processo de otimização.

Em seguida define-se na ferramenta de otimização do MATLAB, a *optimtool*, os limites inferiores e superiores das variáveis e inicia-se o processo de otimização. Para tal, utiliza-se o algoritmo SQP (*Sequential Quadratic Programming*), um algoritmo de programação não linear que permite a resolução de otimizações não-lineares com constrangimentos. Ao longo do processo as tolerâncias dos critérios de paragem (valor do deslocamento, valor das variáveis e o valor do constrangimento) foram afinadas de modo a obter os melhores resultados.



Uma das grandes vantagens que o PROAES apresenta para a resolução de problemas de otimização é o facto de calcular as sensibilidades e poder fornecer ao algoritmo essas derivadas. Estas serão as derivadas da função objetivo (deslocamento) ou do constrangimento (volume) em relação à área de secção transversal, sendo apenas preciso definir na *optimtool* que as *Derivatives* são *Gradient Supplied*. Esta funcionalidade do PROAES permite que o tempo necessário para o algoritmo encontrar a solução seja muito inferior em relação ao método das diferenças finitas (*Aproximated by Solver* na *optimtool*). Essa comparação não vai ser feita neste trabalho e pode ser encontrada em [44].

Realizado o processo de otimização, o valor obtido para a função objetivo foi de $5.139964 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Isto é o valor mínimo do deslocamento do nó 14, onde se encontra aplicada a força, que se consegue obter de acordo com os constrangimentos impostos.

Os valores finais das variáveis de projeto, as áreas de cada uma das 38 barras que compõem a estrutura, podem ser conferidos no ficheiro **opt2ef** final, ou pelo MATLAB, exportando os resultados do *optimtool* para o ambiente de trabalho do programa.

Para a visualização da configuração final da estrutura, que é a solução obtida pelo algoritmo, foi desenvolvido um programa auxiliar **postOPTplot.m**. O seu funcionamento encontra-se detalhado no capítulo 5.1. Neste caso definiram-se duas gamas de valores e estão representadas na Tabela 5.

Tabela 5 - Gamas de valores utilizados na representação da estrutura ótima para o exemplo determinístico

Gamas de Valores (m^2)	Espessura
$1 \times 10^{-4} < A_i$	
$2.5 \times 10^{-5} < A_i < 1 \times 10^{-4}$	

O resultado gráfico obtido quando se corre o programa **postOPTplot.m** está representado na Figura 15. Como se pode constatar, a treliça obtida tem uma simetria em relação a um eixo horizontal que passa pelo nó onde a força está aplicada. Da configuração inicial com 38 barras, após o processo de otimização, apenas 16 barras fazem parte da configuração final da estrutura.

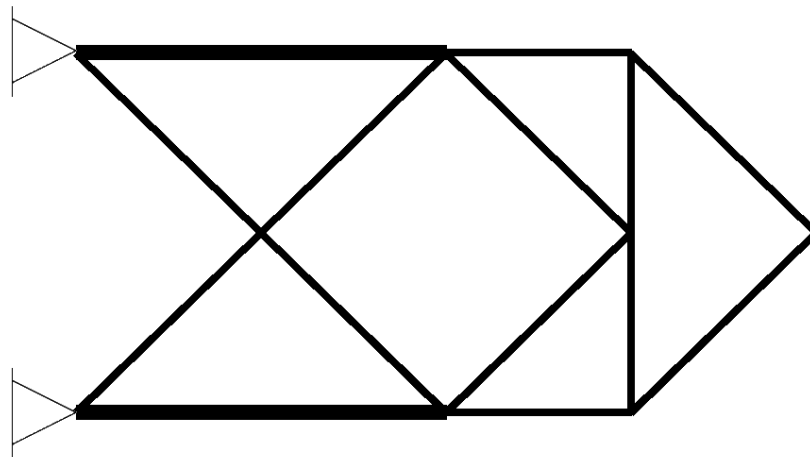


Figura 15 - Treliça 38 Barras após o processo de otimização de topologia

Como é possível verificar na Figura 15, a topologia ótima da estrutura contém vários segmentos de elementos colineares, isto torna a estrutura instável. Estes elementos colineares são unificados num só elemento para eliminar as instabilidades. Apesar de ser uma prática corrente em otimização de topologia, esta alteração acaba por aumentar o comprimento dos elementos sujeitos a esforços de compressão, tornando-os mais propensos ao encurvamento local [46].

Os valores das áreas para cada elemento e a sua relação com o valor da área inicial e a proporção entre a área de secção de cada elemento e a área de secção transversal máxima da estrutura encontram-se na Tabela 6.

Tabela 6 - Valores das áreas obtidas (em m^2) para o exemplo de aplicação do PROAES da secção 3.3, relação entre a área final e inicial, e relação entre a área final de cada elemento em relação a área máxima

E	Área de secção	$\frac{A_{elem}}{A_{inicial}}$	$\frac{A_{elem}}{A_{max}}$	E	Área de secção	$\frac{A_{elem}}{A_{inicial}}$	$\frac{A_{elem}}{A_{max}}$
1	1.3555×10^{-4}	43,15%	99,50%	20	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%
2	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%	21	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%
3	7.5265×10^{-6}	2,40%	5,52%	22	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%
4	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%	23	5.7090×10^{-5}	18,17%	41,90%
5	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%	24	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%
6	1.1811×10^{-7}	0,04%	0,09%	25	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%
7	1.3624×10^{-4}	43,37%	100,00%	26	5.6749×10^{-5}	18,06%	41,65%
8	1.2714×10^{-4}	40,47%	93,32%	27	1.2556×10^{-5}	4,00%	9,22%
9	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%	28	5.0211×10^{-5}	15,98%	36,86%
10	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%	29	5.0483×10^{-5}	16,07%	37,05%
11	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%	30	1.7934×10^{-7}	0,06%	0,13%
12	1.3622×10^{-4}	43,36%	99,98%	31	5.0588×10^{-5}	16,10%	37,13%
13	4.4558×10^{-5}	14,53%	33,51%	32	1.6967×10^{-7}	0,05%	0,12%
14	3.5086×10^{-5}	11,17%	25,75%	33	1.2718×10^{-5}	4,05%	9,34%
15	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%	34	5.0536×10^{-5}	16,09%	37,09%
16	2.6251×10^{-5}	8,36%	19,27%	35	5.6831×10^{-5}	18,09%	41,71%
17	5.5724×10^{-5}	17,74%	40,90%	36	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%
18	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%	37	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%
19	1.0000×10^{-8}	0,00%	0,01%	38	$5,6796 \times 10^{-5}$	18,08%	41,69%

4. Metodologia e caso de estudo

Como referido no capítulo 3, a utilização do PROAES em conjunto com a ferramenta *optimtool* do MATLAB, permite resolver problemas de otimização estrutural (neste caso otimização de topologia) de treliças.

Vai ser apresentado um caso de estudo retirado de [11], para testar a utilização do PROAES com a metodologia proposta para resolver problemas de otimização robusta de topologia. Neste caso pretende-se estudar a incerteza no módulo de elasticidade (E).

Para tal vai ser necessário a criação dos ficheiros referidos na secção 3.3, o ficheiro de dados do problema que é lido pelo PROAES e os ficheiros da função objetivo e dos constrangimentos do problema que são lidos pela ferramenta *optimtool*.

Todos os procedimentos vão ser explicados em detalhe. No capítulo seguinte serão apresentados os resultados e feita a sua comparação com os resultados obtidos por Asadpoure et al. [11]

4.1 Exemplo – Treliça 38 barras

Este exemplo consiste numa estrutura reticulada (treliça) de duas dimensões (x e y), constituída por 15 nós e 38 elementos do tipo Barra 2D, que está apoiada nos nós 1, 2 e 3, restringindo os seus deslocamentos na direção horizontal (x) e vertical (y), e tem uma força aplicada no nó 14 segundo a direção horizontal com um valor de $P = 100\text{ N}$. A estrutura encontra-se representada na Figura 16

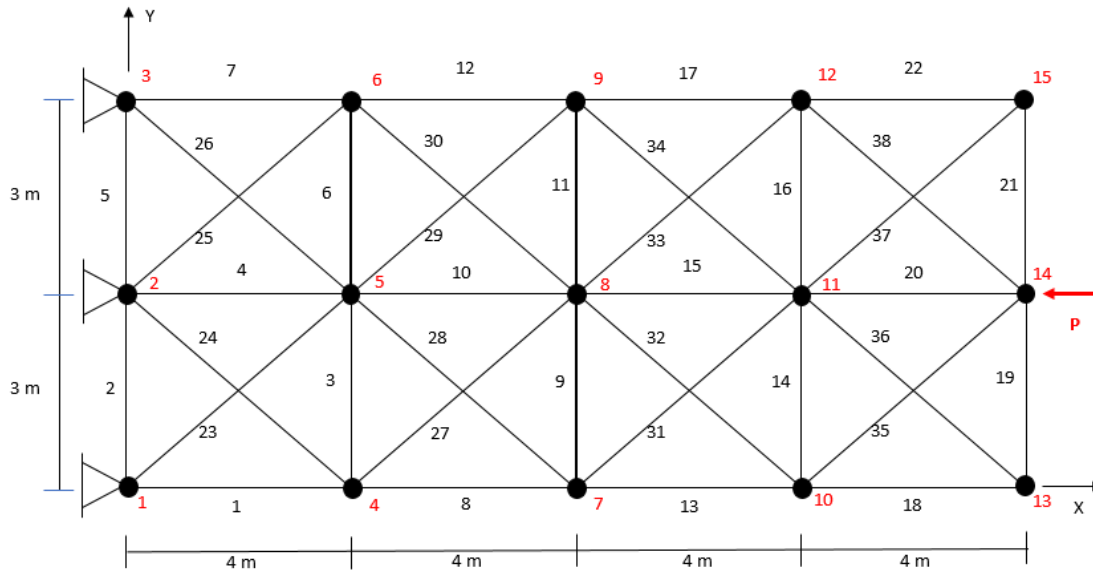


Figura 16 - Treliça 38 barras

A relação entre as barras horizontais e verticais é de 4/3, ou seja, todas as barras horizontais têm um comprimento de 4 m e as verticais 3 m, as barras oblíquas tem 5 m de comprimento.

Todas as barras que compõe a estrutura são constituídas pelo mesmo material com um modulo de elasticidade de 210 GPa, e possuem todas a mesma área de secção transversal inicial, $3,14159 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

4.1.1 Formulação do problema

No exemplo apresentado, o objetivo é minimizar a *compliance* (maximizar a rigidez) da estrutura tendo em conta a incerteza no módulo de elasticidade, aplicando um constrangimento no volume total que é admissível para a sua topologia final.

Sabendo que $\{f\} = [K]\{d\}$, a expressão da *compliance* para este caso é dada por $C[C] = \{f\}^T \{d\}$, e visto que a força é constante, a minimização da *compliance* é o equivalente de minimizar o deslocamento horizontal no nó 14, onde está aplicada a força.

Recorrendo a equação (16), podemos formular o seguinte problema de otimização robusta (RDO):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & C = \alpha \frac{\mu_c}{\mu^*} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_c}{\sigma^*} \\ \text{sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^N A_i \times L_i \leq V_{adm}; i = 1:N \\ & 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 < A_i < 3,14 \times 10^{-4} \text{ m}^2; i = 1:N \end{aligned} \tag{19}$$

Em que o desvio padrão da *compliance* é dado pela equação (20):

$$\sigma_C = \sqrt{\sum_{i=1}^{NV} \left(\frac{\partial C}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{(x_i)}^2} \quad (20)$$

Para a resolução deste problema com a utilização do PROAES em conjunto com a ferramenta do MATLAB, *optimtool*, é preciso criar 3 ficheiros:

- **trelica_38_I.inp**
- **myfun_trelica_38_I.m**
- **mycon_trelica_38_I.m**

O primeiro ficheiro a ser criado é o **trelica_38_I.inp**, onde são definidos todos os dados da estrutura (coordenadas dos nós, elementos, forças aplicadas, material, ...) para serem lidos no *PROAES* e ainda os parâmetros essenciais como as variáveis de projeto e as *performances*. Neste caso é preciso definir dois tipos de variáveis no ficheiro de dados, as variáveis de projeto e as variáveis internas. Apesar de a sua definição neste ficheiro não ter nenhuma diferença, vão ter finalidades diferentes.

A variável de projeto neste caso é a área da secção transversal de cada uma das barras, por isso também é preciso definir 38 valores de secção (s) para que cada barra possa ter um valor individual. É nestas variáveis que o algoritmo vai mexer de forma a otimizar a função. A variável interna (ou parâmetro incerto) é o módulo de elasticidade do material de cada barra, que neste caso tem o valor médio de 210 GPa. Visto que se pretende estudar a influência da incerteza associada a este parâmetro, define-se esta variável para que o PROAES possa calcular as derivadas das performances em ordem a esta variável. Na Tabela 7 estão listadas as performances deste problema:

Tabela 7 - Performances do exemplo Treliça 38 Barras

Performance	Descrição
1	Volume
2	Deslocamento do nó 14 segundo X

A função objetivo é definida escrevendo o ficheiro **myfun_trelica_38_I.m**, este ficheiro tem como função escrever o ficheiro **opt2ef**. Neste caso, é preciso considerar a incerteza associada ao módulo de elasticidade e isso é implementado na função objetivo da seguinte maneira:

1. Escreve o ficheiro **opt2ef**, definindo o valor das 76 variáveis (38 variáveis de projeto e 38 variáveis internas) e as performances que são necessárias (só o deslocamento);
2. Chama o PROAES para efetuar os cálculos necessários;

3. Abre o ficheiro **ef2opt** e lê o valor do deslocamento, que é o equivalente ao valor esperado (μ_c);
4. Lê as derivadas e constrói um vetor com as 76 derivadas do deslocamento em ordem às variáveis de secção de área transversal e módulo de elasticidade;
5. Calcula o valor do desvio padrão total da função (σ_c), fazendo o somatório da multiplicação de cada derivada do deslocamento em ordem ao módulo de elasticidade pelo valor do desvio padrão de cada variável (que é igual para todas);
6. Calcula a soma ponderada dos valores obtidos em 3 e 5 de acordo com o coeficiente de peso α definido.

De referir que é necessário fazer este processo primeiro com a equação não normalizada da função objetivo para se obter os valores de μ^* (para $\alpha = 1$) e σ^* (para $\alpha = 0$) e só depois calcular o valor da função objetivo para um coeficiente de peso no intervalo $\alpha \in]0,1[$. Isto é necessário devido à diferença da ordem de grandeza dos dois termos da equação que define a função objetivo.

O constrangimento do volume é definido no ficheiro criado com o nome **mycon_trellica_38.m**. À semelhança do ficheiro da função objetivo descrito no parágrafo anterior, este ficheiro também tem como responsabilidade escrever o ficheiro **opt2ef** e chamar o PROAES para que este execute os cálculos necessários para verificar se a solução que foi calculada cumpre ou não com o constrangimento definido no problema, e caso isso não se verifique, continuar com o processo de otimização.

Considera-se que a configuração final só pode ter como volume admissível o volume das 4 barras colineares entre o nó onde a força é aplicada, nomeadamente as barras 4,10,15 e 20, cada um destes elementos tem um comprimento de 4 metros e uma área de secção transversal de $3.14 \times 10^{-4} m^2$. O volume inicial da estrutura pode ser calculado pelo PROAES ou fazendo o somatório do volume de cada elemento, sabendo que temos 12 barras horizontais, 10 verticais e 16 oblíquas, vem então que:

$$V_i = (12 \times 4 m + 10 \times 3 m + 16 \times 5 m) \times 3.14 \times 10^{-4} m^2 = 4.9637 \times 10^{-2} m^3$$

$$\frac{V_{adm}}{V_i} = \frac{4 \times 4 m \times 3.14 \times 10^{-4} m^2}{4.9637 \times 10^{-2} m^3} = 0.1013 \approx 10\%$$

É possível concluir que o volume admissível para a estrutura final é sensivelmente 10% do seu volume inicial.

Após tudo ser definido na ferramenta de otimização do MATLAB, a *optimtool*, tal como os limites inferiores e superiores das variáveis, inicia-se o processo de otimização, utilizando o algoritmo SQP (*Sequential Quadratic Programming*). O SQP é um algoritmo de programação não linear que permite a resolução de otimizações não-lineares com constrangimentos. Ao longo do processo as tolerâncias dos critérios de paragem (valor do deslocamento, valor das variáveis

e o valor do constrangimento) foram afinadas de modo a que se pudesse obter os melhores resultados.

Neste caso, não é possível utilizar as derivadas calculadas pelo PROAES para fornecer o gradiente da função objetivo ao *optimtool*, visto que não se conseguiu calcular analiticamente as segundas derivadas da expressão da variância e por isso usou-se o método das diferenças finitas.

5 Resultados

Neste capítulo vão ser apresentados os resultados obtidos após a otimização do caso de estudo com a metodologia explicada no capítulo anterior para diferentes valores de variabilidade (10%, 20% e 30%) e coeficiente de peso α variando entre 0 e 1.





Vai ser também explicado o funcionamento de um programa auxiliar “postOPTplot” escrito em linguagem MATLAB. Este programa foi desenvolvido para uma fácil representação gráfica dos resultados obtidos.

5.1 Programa de pós processamento - “postOPTplot”

Como as variáveis de otimização são valores de áreas de secção transversal, para se ter uma ideia da estrutura final sem ser preciso recorrer a um desenho manual ou à listagem das áreas, foi desenvolvido um programa auxiliar em linguagem MATLAB, de nome **postOPTplot.m**.

Este programa permite desenhar os elementos da estrutura com diferentes espessuras tendo em conta a sua área da secção transversal, e para se ter uma relação da espessura de cada um, estas áreas são divididas em diversas gamas de valores. Ao longo da realização deste trabalho estes valores foram sendo calibrados tendo em conta a análise aos resultados de cada otimização para que se pudesse ter uma ideia de que gamas definir. Sendo assim na Tabela 8 temos os valores utilizados em todas as simulações.

Tabela 8 - Gamas de valores utilizados na representação da estrutura ótima

Gamas de Valores (m^2)	Espessura
$1.5 \times 10^{-4} < A_i < 3.14 \times 10^{-4}$	
$1 \times 10^{-4} < A_i < 1.5 \times 10^{-4}$	
$5 \times 10^{-5} < A_i < 1 \times 10^{-4}$	
$1 \times 10^{-5} < A_i < 5 \times 10^{-5}$	

Este programa foi escrito de modo a que seja de fácil utilização com outros exemplos. Para isso o utilizador só precisa de exportar os resultados da otimização obtidos com a ferramenta *optimtool* do MATLAB para a *workspace* (optimresults) e em seguida correr o programa, que quando executado pergunta ao utilizador pelo ficheiro de dados.**inp** da estrutura e desenha o resultado. Na Figura 17 está representada uma esquematização do funcionamento do *postOPTplot*

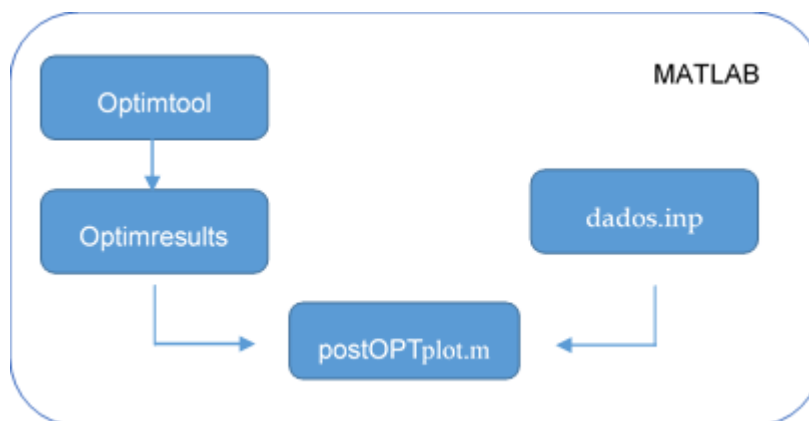


Figura 17 - Esquematização do programa *postOPTplot*

5.2 Resultados

Realizaram-se otimizações para três valores de variabilidade (10%, 20% e 30%) com o coeficiente de peso α a variar entre 0 e 1 com incrementos de 0.1, o que dá um total de trinta e três vezes que o algoritmo de otimização foi corrido conforme descrito no capítulo 4.

5.2.1 Variabilidade = 10%

Como explicado anteriormente, primeiro é preciso encontrar os valores de μ^* e σ^* de forma a obter-se a equação normalizada da otimização robusta, e para isso é necessário correr o algoritmo com a equação (16) não normalizada para $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$ respetivamente. E depois com a equação normalizada da *compliance* correr o algoritmo para os restantes valores do coeficiente de peso.

Para este valor de variabilidade, o desvio padrão do módulo de young equivale a $\sigma_{x_i} = 0.1 \times 210 \times 10^9 = 210 \times 10^8 \text{ Pa}$

Para o valor do coeficiente de peso α igual a 1, o segundo membro da equação (16) é nulo e por isso o problema é o equivalente a um problema determinístico. O resultado da estrutura após o processo de otimização está representado na Figura 18.



Figura 18 - Resultado da otimização da treliça para um valor de $\alpha = 1$.

Como se pode verificar pela Figura 18, o material é distribuído apenas pelos quatro elementos horizontais entre o apoio no nó 2 e o ponto de aplicação da força P , nomeadamente as barras 4, 10, 15, 20. Esta solução é claramente instável e qualquer perturbação na sua geometria ou na orientação no carregamento pode levar ao seu colapso.

O valor de μ^* obtido é $2.425 \times 10^{-5} \text{ m}$, isto é o equivalente ao deslocamento mínimo obtido com os constrangimentos impostos.

Após a alteração do valor do coeficiente de peso α para zero no ficheiro **myfun_trelica_38_I.m** realizou-se nova otimização de forma a obter-se o valor de σ^* , neste caso é o primeiro termo da equação (16) que é nulo, então o objetivo é apenas minimizar o valor do desvio padrão do deslocamento.

Consultando os resultados da otimização verificou-se que dos 38 elementos da estrutura inicial apenas 22 fazem parte da estrutura final, sendo que ficam de fora os seguintes elementos numerados como 2, 3, 5, 6, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 37. A configuração final da estrutura está representada na Figura 19

O valor de σ^* obtido é $8.697 \times 10^{-7} \text{ m}$, isto é o equivalente ao deslocamento mínimo obtido com os constrangimentos impostos.

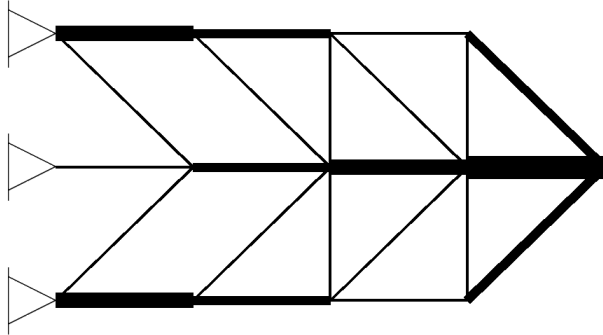


Figura 19 - Resultado da otimização da treliça para um valor de $\alpha = 0$

Agora que já se determinaram os valores de μ^* e σ^* obteve-se a seguinte equação normalizada da *compliance* que será utilizada no ficheiro **myfun_trelica_38_I.m** para os cálculos seguintes

$$C = \alpha \frac{\mu_c}{2.425 \times 10^{-5}} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_c}{8.697 \times 10^{-7}}$$

Após a alteração do valor de α para 0.1 no ficheiro **myfun_trelica_38_I.m** realizou-se nova otimização. Neste caso já vamos ter um problema em que se pretende minimizar o valor esperado e o desvio padrão ao mesmo tempo. Consultando os resultados da otimização verificou-se que dos 38 elementos da estrutura inicial apenas 22 fazem parte da estrutura final, sendo que ficam de fora os seguintes elementos numerados como 2, 3, 5, 6, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 37. A configuração final da estrutura está representada na Figura 20.

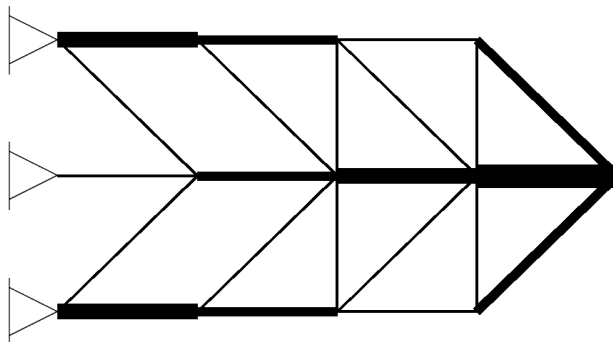


Figura 20 - Resultado da otimização da treliça para um valor de $\alpha = 0.1$

Como se pode ver na Figura 20, a estrutura assemelha-se bastante à solução obtida para $\alpha = 0$

Consultando os resultados da otimização para $\alpha = 0.2$ verificou-se que dos 38 elementos da estrutura inicial apenas 22 fazem parte da estrutura final, sendo que ficam de fora os seguintes elementos numerados como. 2, 3, 5, 6, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 37. A configuração final da estrutura está representada na Figura 21.

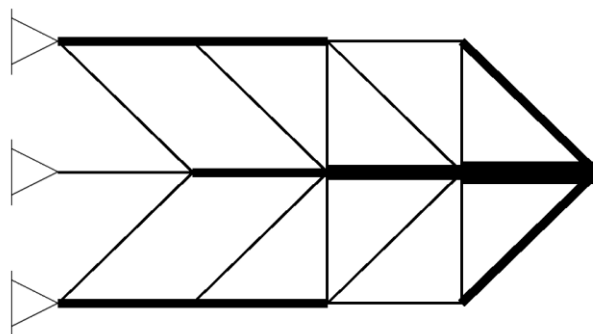


Figura 21 - Resultado da otimização da treliça para um valor de $\alpha = 0.2$

Comparando esta estrutura com a anterior, é possível reparar que o algoritmo retirou material dos elementos 1 e 8 para distribuir pelos restantes elementos.

Para $\alpha = 0.3$ repetiu-se o procedimento e consultando os resultados da otimização verificou-se que dos 38 elementos da estrutura inicial apenas 20 fazem parte da estrutura final, sendo que ficam de fora os seguintes elementos numerados como. 2, 3, 5, 6, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 37. A configuração final da estrutura está representada na Figura 22.

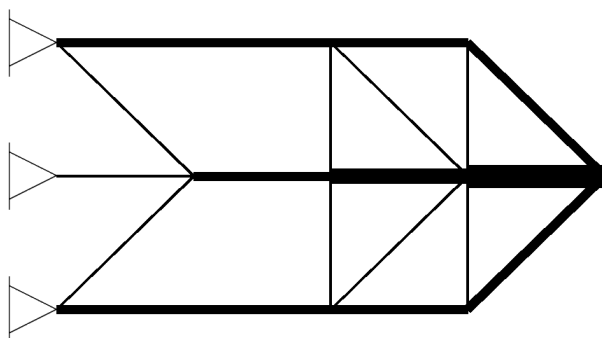


Figura 22 - Resultado da otimização da treliça para um valor de $\alpha = 0.3$

Comparando esta solução com a obtida anteriormente com $\alpha = 0.2$ é possível verificar que o algoritmo retirou os elementos 27 e 30 e reforçou os elementos 13 e 17, que ajudam a distribuir a força pelos apoios superior e inferior (nó 1 e 3).

Consultando os resultados da otimização para $\alpha = 0.4$ verificou-se que dos 38 elementos da estrutura inicial apenas 14 fazem parte da estrutura final, sendo que ficam de fora os seguintes elementos numerados com. 2, 3, 5, 6, 9, 11, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37. A configuração final da estrutura está representada na Figura 23.

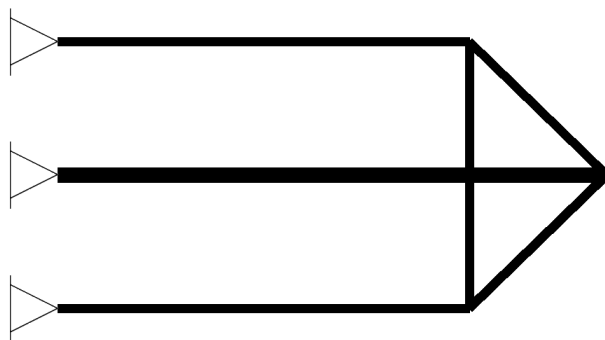


Figura 23 - Resultado da otimização da treliça para um valor de $\alpha = 0.4$

Comparando esta solução com a obtida anteriormente com $\alpha = 0.3$ é possível verificar que o algoritmo retirou os elementos 9, 11, 23, 26, 27, 30, 31 e 34 e reforçou os elementos verticais 14 e 16, para além de distribuir o volume de uma maneira mais uniforme nos quatro elementos que estão entre o ponto de aplicação da força e o apoio.

Consultando os resultados da otimização para $\alpha = 0.5$ verificou-se que dos 38 elementos da estrutura inicial apenas 14 fazem parte da estrutura final, sendo que ficam de fora os seguintes elementos numerados como. 2, 3, 5, 6, 9, 11, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37. A configuração final da estrutura está representada na Figura 24

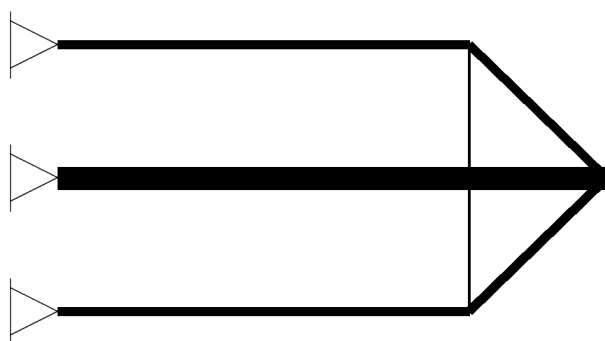


Figura 24 - Resultado da otimização da treliça para um valor de $\alpha = 0.5$

Comparando esta solução com a obtida anteriormente com $\alpha = 0.4$ é possível verificar que o algoritmo retirou material dos elementos 14 e 17 e reforçou ainda mais os elementos horizontais do centro da estrutura.

Para valores do coeficiente de peso superiores a 0.5 a estrutura resultante é igual a obtida para $\alpha = 1$, ou seja, é igual à solução determinística.

Na Figura 25 estão representados os valores normalizados do valor esperado e do desvio padrão da *compliance* para as soluções ótimas obtidas utilizando diferentes valores do coeficiente de peso α . Como é visto na figura não é possível alcançar o valor mínimo para o valor esperado e o desvio padrão da *compliance* ao mesmo tempo. A medida que o valor esperado da *compliance* aumenta, o desvio padrão diminui e vice-versa. O que este balanço entre as duas medidas significa é que para controlar a variabilidade da estrutura e obter uma solução robusta sacrifica-se parte do seu design ótimo (que seria sempre com condições determinísticas, ou quase determinísticas). Neste exemplo, o valor esperado da *compliance* com a menor variabilidade ($\alpha = 0$) é 54% maior que o valor esperado da *compliance* em uma estrutura otimizada sem controlo sobre a variabilidade ($\alpha = 1$). Isto demonstra a importância de se considerar os dois objetivos: minimizar o valor esperado e o desvio padrão da *compliance*, no projeto de uma estrutura.

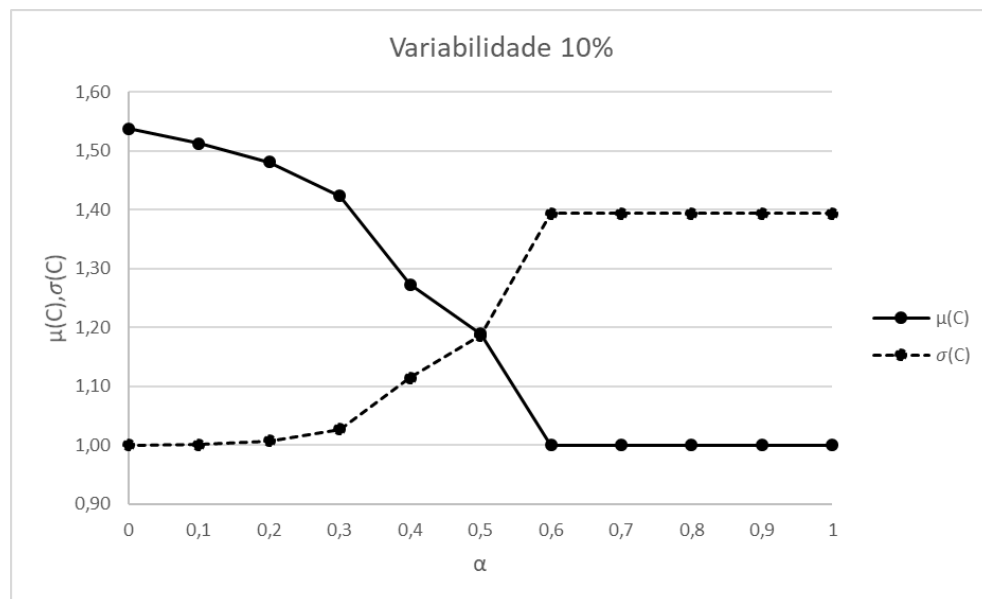


Figura 25 - Valores normalizados do valor esperado e desvio padrão da *compliance* para diferentes valores de α com 10% de variabilidade no módulo de Young

5.2.2 Variabilidade = 20%

De uma forma sucinta vão se apresentar os resultados obtidos para 20% de variabilidade no modulo de Young.

Na Figura 26 encontram-se os resultados das soluções obtidas para as estruturas com variação do valor do coeficiente de peso.

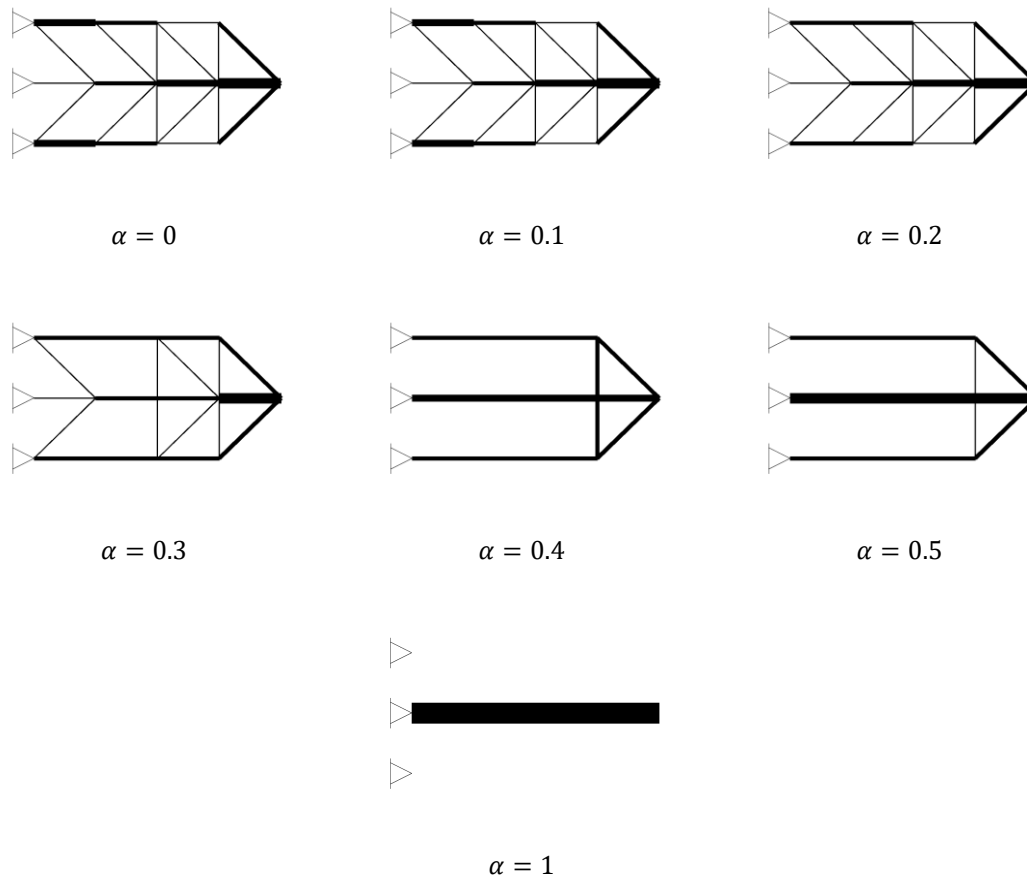


Figura 26 - Resultados obtidos com 20% de variabilidade no módulo de Young para vários valores do coeficiente de peso α

Na Figura 27 estão representados os valores normalizados do valor esperado e do desvio padrão da *compliance* para as soluções ótimas obtidas utilizando diferentes valores do coeficiente de peso α .

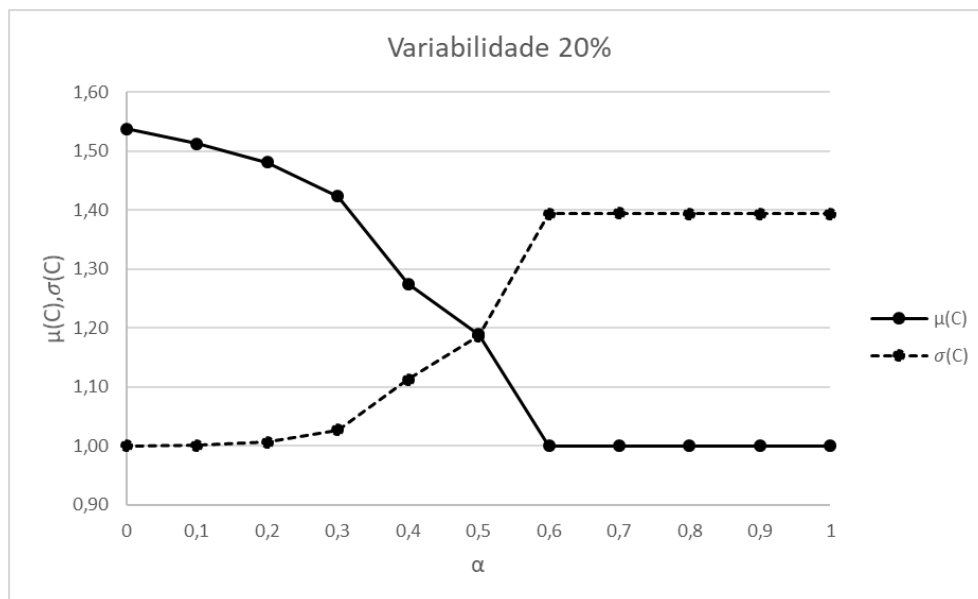


Figura 27 - Valores normalizados do valor esperado e desvio padrão da *compliance* para diferentes valores de α com 20% de variabilidade no módulo de Young

5.2.3 Variabilidade = 30%

De uma forma sucinta vão se apresentar os resultados obtidos para 30% de variabilidade no módulo de Young.

Na Figura 28 encontram-se os resultados das soluções obtidas para as estruturas com variação do valor do coeficiente de peso.

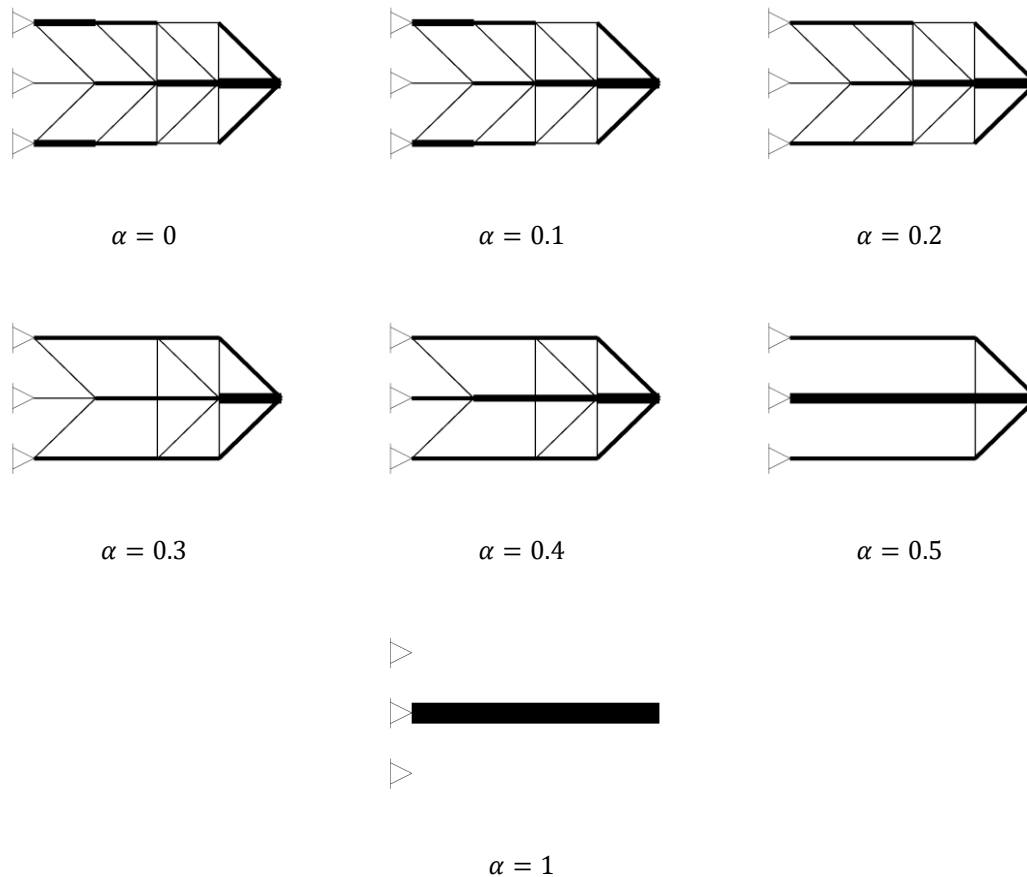


Figura 28 - Resultados obtidos com 30% de variabilidade no módulo de Young para vários valores do coeficiente de peso α

Na Figura 29 estão representados os valores normalizados do valor esperado e do desvio padrão da *compliance* para as soluções ótimas obtidas utilizando diferentes valores do coeficiente de peso α .

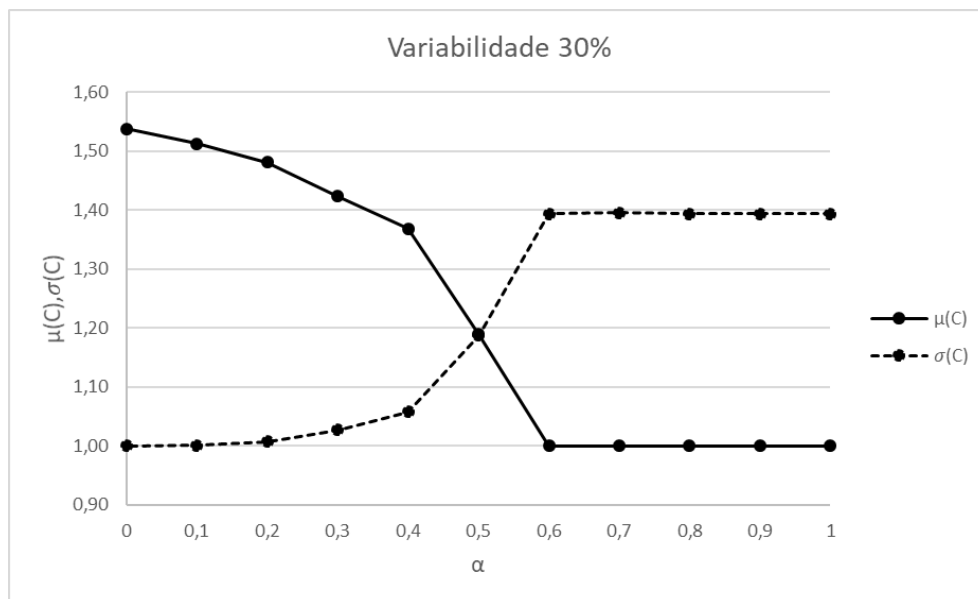


Figura 29 - Valores normalizados do valor esperado e desvio padrão da *compliance* para diferentes valores de α com 30% de variabilidade no módulo de Young

5.3 Discussão dos resultados

Na Figura 30 estão representados os resultados obtidos em todos os processos de otimização robusta de topologia considerando a incerteza.

Utilizando o método descrito no capítulo 4 o algoritmo foi corrido para diferentes valores de variabilidade do módulo de Young (10%, 20% e 30%) e do coeficiente de peso α .

Um olhar atento para as soluções ótimas das estruturas obtidas para as diferentes importâncias do coeficiente de peso permite concluir o seguinte:

- Para um valor do coeficiente de peso superior a 0.5 os resultados obtidos são iguais a solução determinística do problema, isto pode estar relacionado com o facto de para um valor superior a 0.5 o objetivo de minimizar o valor esperado ganha mais peso na equação da otimização robusta em relação a minimizar o desvio padrão.
- Conforme a importância de minimizar a variabilidade da *compliance* aumenta (valor de α a diminuir) vão surgindo mais elementos na estrutura ótima, primeiro surgem elementos que vão estabelecer uma ligação entre o ponto de aplicação da força e os apoios superior e inferior (para $\alpha = 0.5$), essa solução ainda apresenta ser instável visto que há diversos elementos colineares sujeitos à encurvadura.
- As estruturas com menos variabilidade na *compliance* (α entre 0.3 e 0) apresentam uma composição com diversos elementos de uma espessura menor no seu interior, estes elementos aumentam a sua estabilidade e como consequência temos soluções mais robustas.
- Com o aumento da variabilidade no modulo de Young não se verificaram grandes mudanças nas soluções obtidas exceto para um coeficiente de peso $\alpha = 0.4$, em que para 30% de variabilidade obteve-se uma solução com uma estabilidade e robustez superior em relação aos outros valores de variabilidade.

Os valores obtidos para os volumes das 38 barras das estruturas obtidas para os diversos valores de variabilidade do modulo de Young e coeficiente de peso encontram-se na Tabela 9 e na Tabela 10.

Tabela 9 - Valores de volume de cada barra da estrutura do exemplo da secção 4.1 para diferentes valores de variabilidade do modulo de Young e do coeficiente de peso (0, 0.1 e 0.2)

	0			0.1			0.2		
	10	20	30	10	20	30	10	20	30
1	8,33%	8,32%	8,33%	8,01%	8,01%	8,02%	7,58%	7,58%	7,56%
2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
3	0,58%	0,57%	0,58%	0,54%	0,54%	0,54%	0,43%	0,44%	0,44%
4	1,05%	1,05%	1,05%	1,26%	1,26%	1,26%	1,61%	1,61%	1,62%
5	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
6	0,57%	0,57%	0,57%	0,54%	0,54%	0,54%	0,45%	0,44%	0,45%
7	8,32%	8,34%	8,33%	8,00%	8,01%	8,01%	7,58%	7,58%	7,59%
8	6,23%	6,24%	6,24%	6,25%	6,25%	6,25%	6,32%	6,31%	6,32%
9	0,80%	0,79%	0,79%	0,83%	0,83%	0,83%	0,87%	0,87%	0,87%
10	4,96%	4,98%	4,97%	5,44%	5,43%	5,44%	6,13%	6,13%	6,10%
11	0,80%	0,79%	0,79%	0,82%	0,83%	0,83%	0,87%	0,87%	0,87%
12	6,23%	6,26%	6,25%	6,26%	6,26%	6,26%	6,32%	6,32%	6,31%
13	3,58%	3,59%	3,59%	3,73%	3,75%	3,74%	3,94%	3,93%	3,94%
14	1,69%	1,69%	1,70%	1,83%	1,83%	1,83%	1,98%	1,98%	1,99%
15	9,38%	9,37%	9,37%	9,18%	9,19%	9,17%	8,88%	8,91%	8,90%
16	1,70%	1,69%	1,70%	1,82%	1,83%	1,82%	1,98%	1,98%	1,98%
17	3,58%	3,60%	3,60%	3,72%	3,75%	3,75%	3,95%	3,94%	3,95%
18	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
19	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
20	16,17%	16,17%	16,16%	15,59%	15,55%	15,55%	14,86%	14,87%	14,84%
21	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
22	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
23	1,81%	1,81%	1,81%	1,99%	1,99%	1,99%	2,23%	2,23%	2,21%
24	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
25	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
26	1,81%	1,81%	1,80%	1,99%	1,99%	1,99%	2,23%	2,23%	2,24%
27	1,94%	1,92%	1,92%	1,70%	1,70%	1,69%	1,31%	1,32%	1,32%
28	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
29	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
30	1,93%	1,91%	1,91%	1,69%	1,70%	1,68%	1,31%	1,31%	1,31%
31	2,81%	2,81%	2,82%	2,79%	2,78%	2,80%	2,77%	2,76%	2,75%
32	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
33	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
34	2,81%	2,80%	2,81%	2,79%	2,79%	2,80%	2,76%	2,77%	2,76%
35	6,45%	6,44%	6,45%	6,60%	6,60%	6,60%	6,81%	6,81%	6,82%
36	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
37	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
38	6,45%	6,45%	6,44%	6,61%	6,60%	6,59%	6,82%	6,81%	6,84%

Tabela 10 - Valores de volume de cada barra da estrutura do exemplo da secção 4.1 para diferentes valores de variabilidade do modulo de Young e do coeficiente de peso (0.3, 0.4 e 0.5)

	0.3			0.4			0.5		
	10	20	30	10	20	30	10	20	30
1	6,72%	6,70%	6,69%	5,70%	5,72%	6,28%	4,39%	4,38%	4,39%
2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
3	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
4	2,61%	2,65%	2,65%	10,24%	10,18%	4,41%	13,72%	13,70%	13,70%
5	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
6	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
7	6,70%	6,70%	6,70%	5,67%	5,72%	6,28%	4,38%	4,38%	4,39%
8	6,68%	6,69%	6,70%	5,70%	5,72%	6,28%	4,39%	4,38%	4,39%
9	0,96%	0,95%	0,95%	0,00%	0,00%	0,74%	0,00%	0,00%	0,00%
10	7,90%	7,91%	7,90%	10,24%	10,18%	8,80%	13,70%	13,70%	13,70%
11	0,93%	0,95%	0,95%	0,00%	0,00%	0,73%	0,00%	0,00%	0,00%
12	6,65%	6,69%	6,70%	5,72%	5,72%	6,27%	4,39%	4,38%	4,39%
13	4,32%	4,38%	4,38%	5,70%	5,72%	4,64%	4,38%	4,38%	4,38%
14	2,23%	2,26%	2,26%	3,06%	3,06%	2,46%	2,43%	2,41%	2,41%
15	7,96%	7,92%	7,91%	10,20%	10,18%	8,81%	13,67%	13,71%	13,70%
16	2,26%	2,26%	2,26%	3,06%	3,06%	2,46%	2,42%	2,41%	2,41%
17	4,32%	4,38%	4,37%	5,73%	5,72%	4,64%	4,38%	4,38%	4,38%
18	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
19	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
20	13,74%	13,57%	13,58%	10,21%	10,18%	12,80%	13,66%	13,71%	13,70%
21	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
22	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
23	2,70%	2,70%	2,71%	0,00%	0,00%	2,33%	0,00%	0,00%	0,00%
24	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
25	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
26	2,70%	2,71%	2,71%	0,00%	0,00%	2,34%	0,00%	0,00%	0,00%
27	0,08%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
28	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
29	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
30	0,06%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
31	2,85%	2,86%	2,87%	0,00%	0,00%	2,13%	0,00%	0,00%	0,00%
32	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
33	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
34	2,87%	2,86%	2,86%	0,00%	0,00%	2,13%	0,00%	0,00%	0,00%
35	7,37%	7,42%	7,42%	9,38%	9,41%	7,72%	7,02%	7,02%	7,03%
36	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
37	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
38	7,35%	7,42%	7,42%	9,38%	9,41%	7,71%	7,04%	7,02%	7,03%

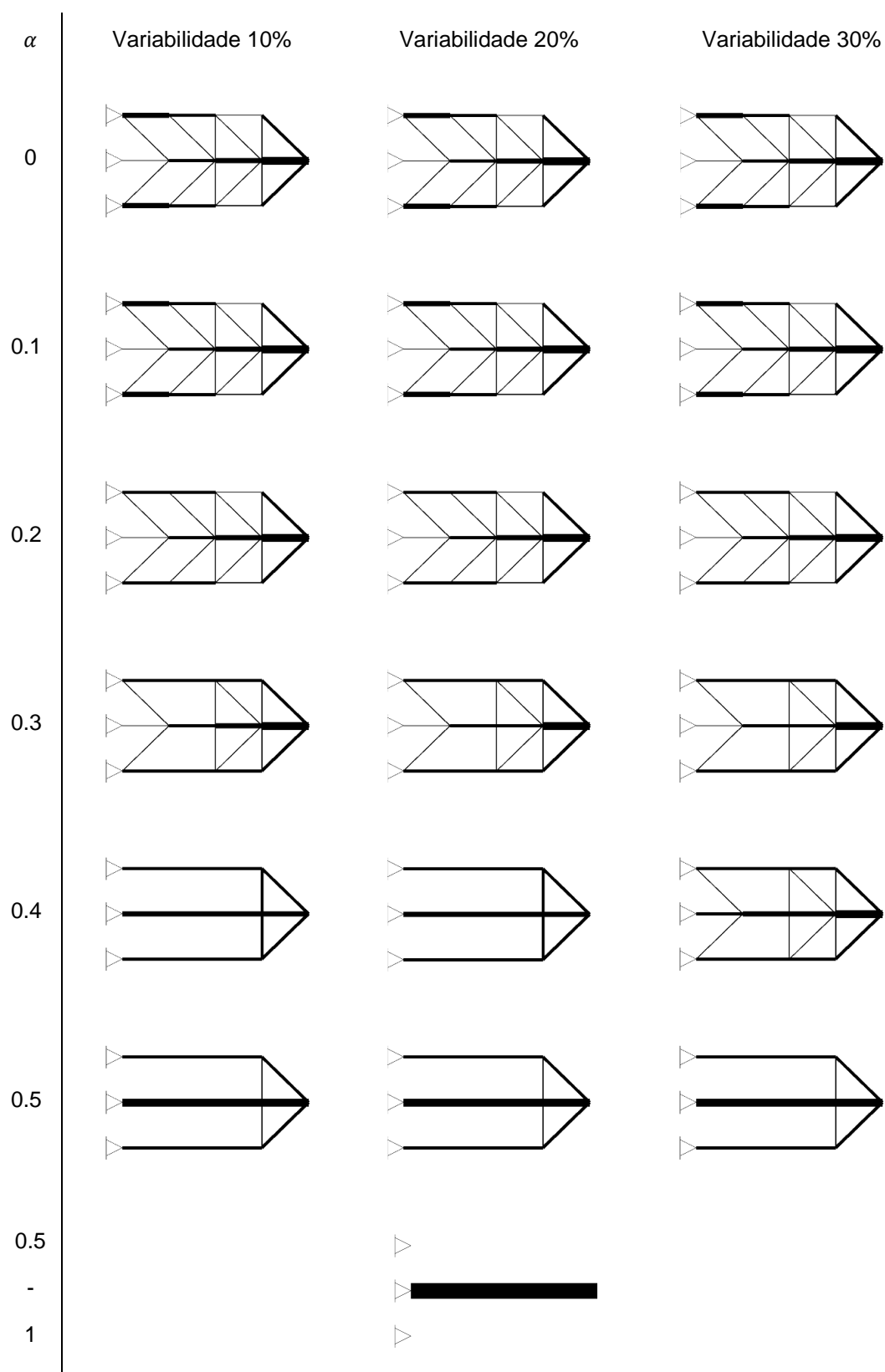


Figura 30 - Resultados obtidos para diferentes valores de variabilidade do módulo de Young

Na Figura 31 encontra-se uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho e os resultados obtidos por Asadpoure et al. [11]. Em primeiro lugar é preciso referir que não existe qualquer informação referente aos resultados usados como termo de comparação, como por exemplo se a área de secção transversal tem como limite superior valores iguais aos das áreas com que se começa o problema (tal como neste trabalho), ou se podem assumir valores superiores. Depois, os resultados gráficos apenas referem que o traço utilizado para representação equivale à espessura da área de secção transversal.

Analisando a Figura 31 é possível concluir que os resultados são bastante semelhantes em termos qualitativos, existe uma preocupação do algoritmo em reforçar o interior da estrutura com elementos diagonais e verticais tanto na parte superior e inferior da estrutura, e distribuir mais material para os elementos que estão ligados aos apoios superior e inferior. Para $\alpha = 0$ verifica-se que nos resultados obtidos neste trabalho são excluídas as duas barras verticais mais próximas dos apoios.

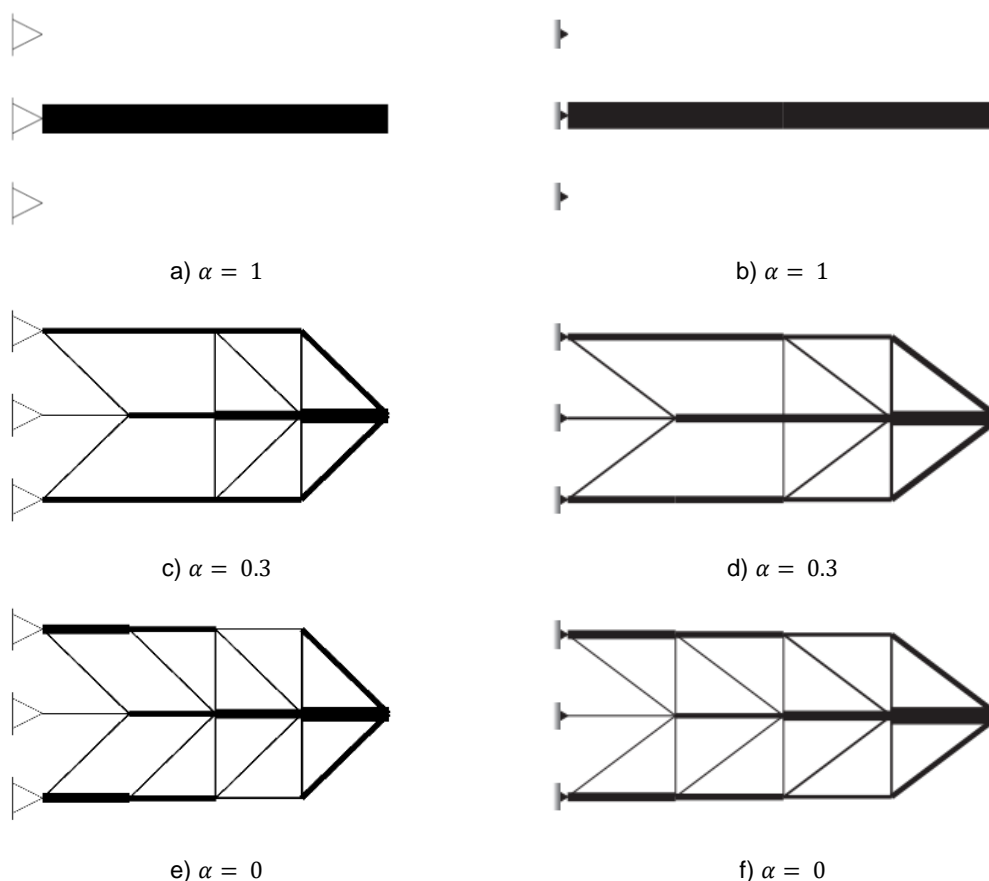


Figura 31 - Resultados da otimização do exemplo para 10% de variabilidade no módulo de Young e diferentes valores de α , a coluna da esquerda representa os resultados obtidos neste trabalho, e a coluna da direita os resultados obtidos por Asadpoure et al. [11]

6. Conclusões

O objetivo principal desta dissertação consistiu no desenvolvimento de uma nova metodologia para o estudo da influência da incerteza nos parâmetros de projeto na otimização de uma estrutura reticulada.

Foram apresentadas duas formulações que existem para incorporar a incerteza na fase de projeto de uma estrutura, a otimização baseada em fiabilidade (RBDO) e a otimização robusta (RDO), sendo que este trabalho assentou nesta última. A otimização robusta tem em conta os efeitos que pequenas variações em parâmetros de projeto podem ter no desempenho diário de uma estrutura, e deseja obter soluções que sejam dentro do possível pouco sensíveis a essas variações. Neste trabalho formulou-se um problema de otimização robusta de topologia de uma treliça, considerando a variabilidade no módulo de elasticidade do material que compõe os elementos da estrutura. Esta formulação consiste numa soma ponderada de duas medidas estatísticas, o valor esperado e o desvio padrão.

A abordagem com o método da *Ground Structure* permite que um problema de topologia de treliça seja visto como um problema de otimização dimensional. No entanto, o número de variáveis de projeto é de uma magnitude superior ao número de variáveis de estado que descrevem o equilíbrio da estrutura.

Foi utilizada a ferramenta de otimização do MATLAB, a *optimtool*, em conjunto com o programa PROAES para a resolução do problema formulado. Este programa (PROAES) permite o cálculo das derivadas das performances em relação às variáveis de projeto e assim fornecer ao algoritmo e a função objetivo. Para validar a metodologia proposta foi analisada uma estrutura, em que as soluções obtidas, quando comparadas com as soluções obtidas por outros autores, podem ser consideradas coerentes e satisfatórias.

Como sugestão de trabalho futuro seria de interesse o estudo e adaptação desta metodologia para parâmetros como a localização dos nós e os carregamentos, ou otimização robusta de topologia para meios contínuos.

7. Referências bibliográficas

- [1] J. C. Maxwell, "I.—On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces," *Earth Environ. Sci. Trans. R. Soc. Edinburgh*, vol. 26, no. 1, pp. 1–40, 1870.
- [2] A. G. M. Michell, "LVIII. The limits of economy of material in frame-structures," *Philos. Mag.*, vol. 8, no. 47, pp. 589–597, Nov. 1904.
- [3] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 49, no. 1, pp. 1–23, 1943.
- [4] R. W. Clough, "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis," *J. Struct. Div. ASCE, Proc. 2nd Conf. Electron. Comput.*, pp. 345–378, 1960.
- [5] E. Computation, "Schmit, L. A.: Structural Design by Systematic Synthesis, Proceedings, 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, New York, pp. 105–122, 1960. v," pp. 1–3, 1960.
- [6] P. G. Coelho and J. B. Cardoso, "Métodos Computacionais Em Engenharia Mecânica," *Dep. Eng. Mecânica e Ind. Fac. Ciências e Tecnol. - Univ. Nov. Lisboa*, p. 171, 2012.
- [7] H. G. Beyer and B. Sendhoff, "Robust optimization - A comprehensive survey," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 196, no. 33–34, pp. 3190–3218, 2007.
- [8] J. K. Guest and T. Igusa, "Structural optimization under uncertain loads and nodal locations," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 198, no. 1, pp. 116–124, 2008.
- [9] J. N. Richardson, R. F. Coelho, and S. Adriaenssens, "Robust topology optimization of 2D and 3D continuum and truss structures using a spectral stochastic finite element method," pp. 1–11, 2013.
- [10] Z. Kang and S. Bai, "On robust design optimization of truss structures with bounded uncertainties," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 47, no. 5, pp. 699–714, 2013.
- [11] A. Asadpoure, M. Tootkaboni, and J. K. Guest, "Robust topology optimization of structures with uncertainties in stiffness - Application to truss structures,"

- Comput. Struct.*, vol. 89, no. 11–12, pp. 1131–1141, 2011.
- [12] G. Taguchi, *Systems of experimental design (Vols. I, II)*. New York: Kraus International., 1987.
 - [13] A. J. G. Schoofs, “Structural Optimization History and State-of-the-Art,” in *Topics in Applied Mechanics: Integration of Theory and Applications in Applied Mechanics*, J. F. Dijkman and F. T. M. Nieuwstadt, Eds. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993, pp. 339–345.
 - [14] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, *Topology optimization: theory, methods, and applications*, vol. 2nd Editio, no. 724. 2003.
 - [15] J. Arora, *Introduction to Optimum Design, Third Edition*. 2011.
 - [16] E. Nikolaidis, D. M. Ghiocel, and S. Singhal, *Engineering Design Reliability Handbook*. CRC Press, 2004.
 - [17] R. A. Choi, S. K. ; Grandhi, R. V. ; Canfield, “Reliability-based Structural Optimization,” in *Reliability-based Structural Design*, London: Springer London, 2007, pp. 153–202.
 - [18] R. E. Melchers, *Structural reliability analysis and prediction*, 2nd Editio. John Wiley, 1999.
 - [19] M. Correia, “Optimização Robusta,” Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa, 2014.
 - [20] G. I. Schuëller, H. J. Pradlwarter, and P. S. Koutsourelakis, “A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimensions,” *Probabilistic Eng. Mech.*, vol. 19, no. 4, pp. 463–474, Oct. 2004.
 - [21] C. A. Cornell, “A probability based structural code,” *J. Am. Concr. Inst.*, vol. 66, no. 12, pp. 974–985, 1969.
 - [22] N. C. Hasofer, A.M., Lind, “An exact and invariant first order reliability format,” *J. Engng Mech. Div., ASCE*, vol. 100, no. EM1, pp. 111–121, 1974.
 - [23] S. . Der Kiureghian, A.; Lin, H;Hwang, “Second-Order Reliability Approximations,” *J. Eng. Mech.*, vol. 113, no. 8, pp. 1208–1225, Aug. 1987.
 - [24] H. Karadeniz, V. Toğan, and T. Vrouwenvelder, “An integrated reliability-based design optimization of offshore towers,” *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 94, no. 10, pp. 1510–1516, Oct. 2009.
 - [25] I. Enevoldsen and J. D. Sørensen, “Reliability-based optimization in structural engineering,” *Struct. Saf.*, vol. 15, no. 3, pp. 169–196, Sep. 1994.
 - [26] J. Tu, K. K. Choi, and Y. H. Park, “A New Study on Reliability-Based Design Optimization,” *J. Mech. Des.*, vol. 121, no. 4, pp. 557–564, Dec. 1999.
 - [27] A. Chiralaksanakul and S. Mahadevan, “First-Order Approximation Methods in Reliability-Based Design Optimization,” *J. Mech. Des.*, vol. 127, no. 5, pp. 851–857, Oct. 2004.

- [28] M. Tsompanakis, Yannis; Lagaros, Nikos; Papadrakakis, *Structural design optimization considering uncertainties*. Taylor & Francis, 2008.
- [29] Z. Kang and V. Vorgelegt, "Robust design optimization of structures under uncertainties," *Ph.D. Thesis, Inst. für Statik und Dynamik der Luft - und Raumfahrtkonstruktionen Univ. Stuttgart*, p. 161, 2005.
- [30] V. Kozub, "Otimização robusta multiobjetivo de compósitos constituídos por polímero reforçado por fibra," *Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa*, 2016.
- [31] S. Schmidt and R. A. Launsby, *Understanding industrial designed experiments*, 3rd ed. Air Academy Press, 1991.
- [32] J. M. Lucas, "How to achieve a robust process using response surface methodology," *J. Qual. Technol.*, no. 26, pp. 248–260, 1994.
- [33] N. Changizi, H. Kaboodanian, and M. Jalalpour, "Stress-based topology optimization of frame structures under geometric uncertainty," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 315, pp. 121–140, 2017.
- [34] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, "Robust Truss Topology Design via Semidefinite Programming," *SIAM J. Optim.*, vol. 7, no. 4, pp. 991–1016, 1997.
- [35] E. Sandgren and T. Cameron, *Robust design optimization of structures through consideration of variation*, vol. 80. 2002.
- [36] Y. Kanno and X. Guo, "A mixed integer programming for robust truss topology optimization with stress constraints," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 83, no. 13, pp. 1675–1699, 2010.
- [37] J. N. Richardson, R. Filomeno Coelho, and S. Adriaenssens, "Robust topology optimization of truss structures with random loading and material properties: A multiobjective perspective," *Comput. Struct.*, vol. 154, pp. 41–47, 2015.
- [38] M. Jalalpour, T. Igusa, and J. K. Guest, "Optimal design of trusses with geometric imperfections: Accounting for global instability," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 48, no. 21, pp. 3011–3019, 2011.
- [39] D. Hashimoto and Y. Kanno, "A semidefinite programming approach to robust truss topology optimization under uncertainty in locations of nodes," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 51, no. 2, pp. 439–461, 2015.
- [40] Z. Fu, C. Wang, and J. Zhao, "Truss Topology Optimization Under Uncertain Nodal Locations with Proportional Topology Optimization Method," *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, vol. 7734, no. April, p. 15397734.2016.1163640, 2016.
- [41] T. A. Zang *et al.*, "Needs and Opportunities for Uncertainty- Based Multidisciplinary Design Methods for Aerospace Vehicles," no. July 2002, 2002.
- [42] I. Ben-Haim, Y. ; Elishakoff, *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990.
- [43] J. B. Cardoso, "Manual de Utilização do Programa PROAES - Versão 5.0."

Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa, 2017.

- [44] J. Marmeleiro, “PROAES – Programa de análise de estruturas para aplicação em otimização e análise de fiabilidade,” Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa, 2017.
- [45] T. Baptista, “Análise de fiabilidade de estruturas,” Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa, 2012.
- [46] M. Zhou, “Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, no. 11, pp. 134–136, 1996.

